

静弾性解析

1. 定式化と離散化の概要

1. 1 線形弾性体の定式化

Fig.1 に示される線形弾性体の境界値問題を考える。ただし、微小変形を仮定する。Fig.1 において、 N を次元数とすると、 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は有界領域であり、 $\partial\Omega$ はその境界である。ここで、 Γ_d は変位境界条件が与えられる境界、 Γ_t は応力境界条件が与えられる境界である。 Γ_d と Γ_t の間には、 $\partial\Omega = \Gamma_d \cup \Gamma_t$ および $\phi = \Gamma_d \cap \Gamma_t$ の関係が成り立つとする。

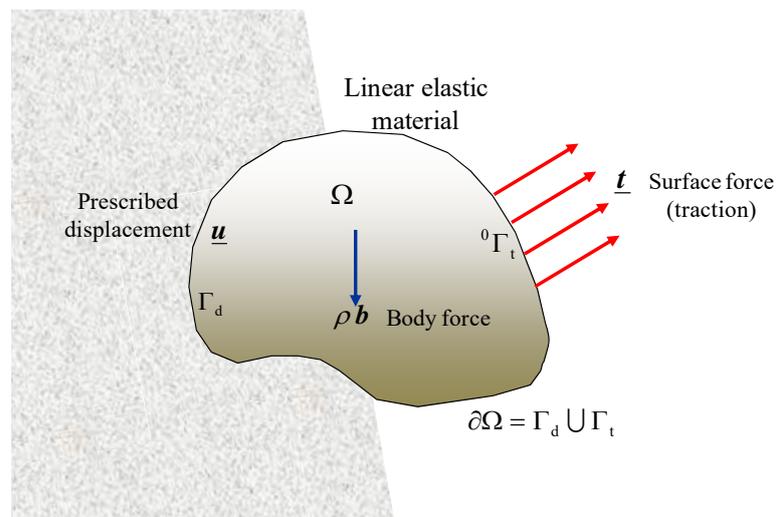


Fig.1 Boundary value problem of linear elastic material

関数空間 $V = \{v \mid v \in H^1(\Omega)^N, v = \underline{u} \text{ on } \Gamma_d\}$ を考えると、線形弾性体の境界値問題は [B] のように記述される。

[B] 以下を満たすような変位 $u \in V$ を求めよ。

(平衡方程式)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1.a)$$

(応力-ひずみの関係式)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \\ &= \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \lambda (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}\end{aligned}\tag{1.b}$$

(ひずみ-変位の関係式)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \{ \nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T \}\tag{1.c}$$

(境界条件式)

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_d\tag{1.d}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ &= \underline{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_t\end{aligned}\tag{1.e}$$

ただし、右上添え字 T はテンソルの転置であることを意味する。また、 ∇ は座標 \mathbf{x} でのナブラ、 $\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソル、 ρ は密度、 \mathbf{b} は単位質量当たりの体積力、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は微小ひずみテンソル、 \mathbf{I} は恒等テンソル、 W は弾性ポテンシャル関数、 \mathbf{C} は 4 階の弾性テンソル、Young 率 E と Poisson 比 ν を用いると、Lamé 定数 λ 、 μ は

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\tag{2.a}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}\tag{2.b}$$

である。

次のエネルギー最小問題 [M] を考える。

[M] 以下を満たすような変位 $\mathbf{u} \in V$ を求めよ。

$$\Phi(\mathbf{u}) \leq \Phi(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V\tag{3.a}$$

$$\Phi(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} W(\mathbf{v}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \underline{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega\tag{3.b}$$

関数空間 $M = \{ \delta \mathbf{u} \mid \delta \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^N, \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_d \}$ を定義すると、 $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}$ となる変分量 $\delta \mathbf{u} \in M$ が存在する。ここで、変分量

$$\delta \Phi = \Phi(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{u})\tag{4}$$

と停留条件

$$\delta \Phi = 0\tag{5}$$

を考えると、

$$\begin{aligned}\delta \Phi &= \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \underline{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \underline{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\ &= 0\end{aligned}\tag{6}$$

が得られる。よって、エネルギー最小問題 [M] は、以下の仮想仕事の原理 [V] と等価で

ある.

[V] 以下を満たすような変位 $\mathbf{u} \in V$ を求めよ.

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \int_{\Gamma_t} \underline{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{u} \in M \quad (7)$$

ただし,

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \{ \nabla \otimes \delta \mathbf{u} + (\nabla \otimes \delta \mathbf{u})^T \} \quad (8)$$

である.

さらに, 式 (8) を式 (7) の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \frac{1}{2} \{ \nabla \otimes \delta \mathbf{u} + (\nabla \otimes \delta \mathbf{u})^T \} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \otimes \delta \mathbf{u}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \\ &= \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \\ &= \int_{\Gamma_t} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \end{aligned} \quad (9)$$

と式変形できるため,

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{b} \quad \text{in } \Omega \quad (10.a)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \underline{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (10.b)$$

が得られる. よって, 仮想仕事の原理 [V] と境界値問題 [B] は等価である.

以上より, 境界値問題 [B], エネルギー最小問題 [M], 仮想仕事の原理 [V] は等価である. 仮想仕事の原理 [V] は境界値問題 [B]より解の微分可能性に対する要求が弱くなるため, 弱形式と呼ばれる. それに対して, 境界値問題 [B] は強形式と呼ばれる.

1. 2 線形弾性体の離散化

有限要素法による離散化式は, 式 (7) の仮想仕事の原理 [V] を

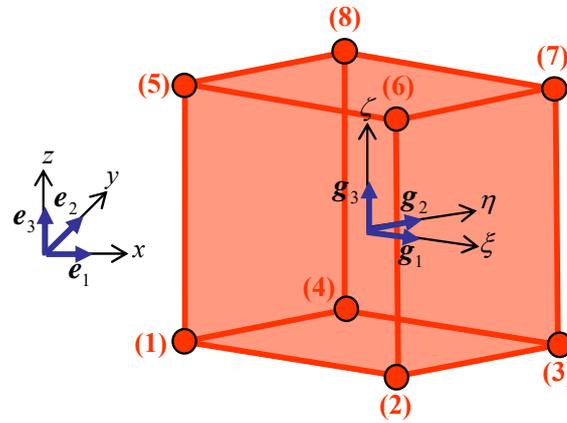
$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_e \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (11)$$

のような有限要素 Ω^e によって分割することによって求まる. 以下では, Fig.2 に示されるような3次元六面体8節点要素を考える. 各要素での節点数を8であるため, 各要素での補間関数と写像関数は

$$\mathbf{u} = \sum_{\alpha=1}^8 N^{(\alpha)} \mathbf{u}^{(\alpha)} \quad (12.a)$$

$$\mathbf{x} = \sum_{\alpha=1}^8 N^{(\alpha)} \mathbf{x}^{(\alpha)} \quad (12.b)$$

のように書くことができる.



$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi}, \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta}, \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta}$$

: Covariant basis vectors

$$N^{(\alpha)} = \frac{1}{8} (1 + \xi^{(\alpha)} \xi) (1 + \eta^{(\alpha)} \eta) (1 + \zeta^{(\alpha)} \zeta)$$

: Shape function

$$\{\xi^{(\alpha)} | \alpha = 1, 2, \dots, 8\} = \{-1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1\}$$

$$\{\eta^{(\alpha)} | \alpha = 1, 2, \dots, 8\} = \{-1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1\}$$

$$\{\zeta^{(\alpha)} | \alpha = 1, 2, \dots, 8\} = \{-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1\}$$

Fig.2 8-node hexahedral element

式 (7) の左辺は, 式 (11) より

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = \sum_e \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega$$

$$= \sum_e \int_{\Omega^e} \begin{pmatrix} \delta \varepsilon_{xx} & \delta \varepsilon_{yy} & \delta \varepsilon_{zz} & 2\delta \varepsilon_{xy} & 2\delta \varepsilon_{yz} & 2\delta \varepsilon_{zx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} d\Omega \quad (13)$$

のように式変形できる.

式 (1.b) より

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{pmatrix} \quad (14)$$

の関係が成り立つ. ただし, \mathbf{D} マトリックスは

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (15)$$

である. また, 式 (1.c) より

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{pmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{u}^e \quad (16)$$

の関係が成り立つ. ただし, \mathbf{B} マトリックスは

$$\mathbf{B}^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial z} \\ \frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial y} & \frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial z} & \frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = (\mathbf{B}^{(1)} \mathbf{B}^{(2)} \dots \mathbf{B}^{(\alpha)} \dots \mathbf{B}^{(8)}) \quad (17)$$

であり, 列ベクトル \mathbf{u}^e は

$$\mathbf{u}^e = \left(u_x^{(1)} u_y^{(1)} u_z^{(1)} u_x^{(2)} u_y^{(2)} u_z^{(2)} \cdots u_x^{(\alpha)} u_y^{(\alpha)} u_z^{(\alpha)} \cdots u_x^{(8)} u_y^{(8)} u_z^{(8)} \right)^T \quad (18)$$

である. さらに, 式 (12.a) より

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u}^e \quad (19)$$

の関係が成り立つ. ただし, \mathbf{N} マトリックスは

$$\mathbf{N}^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} N^{(\alpha)} & 0 & 0 \\ 0 & N^{(\alpha)} & 0 \\ 0 & 0 & N^{(\alpha)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \left(\mathbf{N}^{(1)} \mathbf{N}^{(2)} \cdots \mathbf{N}^{(\alpha)} \cdots \mathbf{N}^{(8)} \right) \quad (20)$$

である.

式 (13) は, 式 (14) と式 (16) より

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega &= \sum_e \int_{\Omega^e} \left(\delta \varepsilon_{xx} \quad \delta \varepsilon_{yy} \quad \delta \varepsilon_{zz} \quad 2 \delta \varepsilon_{xy} \quad 2 \delta \varepsilon_{yz} \quad 2 \delta \varepsilon_{zx} \right) \mathbf{D} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2 \varepsilon_{xy} \\ 2 \varepsilon_{yz} \\ 2 \varepsilon_{zx} \end{pmatrix} d\Omega \\ &= \sum_e \int_{\Omega^e} (\mathbf{B} \delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{D} (\mathbf{B} \mathbf{u}^e) d\Omega \\ &= \sum_e \delta \mathbf{u}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \mathbf{u}^e \\ &= \sum_e \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \end{aligned} \quad (21)$$

のように式変形できる. ただし, \mathbf{K}^e は要素剛性マトリックスであり,

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (22)$$

である. 全体剛性マトリックスを \mathbf{K} とすると, 式 (21) は

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \sum_e \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \quad (23)$$

のように書くことができる. ただし, 総節点数を N とする列ベクトル \mathbf{u} は

$$\mathbf{u} = \left(u_x^1 u_y^1 u_z^1 u_x^2 u_y^2 u_z^2 \cdots u_x^I u_y^I u_z^I \cdots u_x^N u_y^N u_z^N \right)^T \quad (24)$$

である. 式 (18) は各要素で付けられた通し番号であるが, 式 (24) は全体で付けられた通し番号である.

式 (7) の右辺は, 式 (19) より

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega &= \sum_e \oint_{\partial\Omega^e} (\mathbf{N} \delta \mathbf{u}^e)^T \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} d\Gamma + \sum_e \int_{\Omega^e} (\mathbf{N} \delta \mathbf{u}^e)^T \rho \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} d\Omega \\
 &= \sum_e \delta \mathbf{u}^{eT} \oint_{\partial\Omega^e} \mathbf{N}^T \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} d\Gamma + \sum_e \delta \mathbf{u}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \rho \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} d\Omega \\
 &= \sum_e \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{f}^e
 \end{aligned} \tag{25}$$

のように式変形できる。ただし、 \mathbf{f}^e は要素外力ベクトルであり、

$$\mathbf{f}^e = \oint_{\partial\Omega^e} \mathbf{N}^T \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} d\Gamma + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \rho \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} d\Omega \tag{26}$$

である。全体外力ベクトルを \mathbf{f} とすると、式 (25) は

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} = \sum_e \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{f}^e \tag{27}$$

のように書くことができる。

式 (23) と式 (27) より、有限要素法による離散化式

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{28}$$

を得ることができる。

1. 3 非適合要素による線形弾性体の離散化

Wilson ら (1973) が提案した要素^[1]は、各要素で曲げ変形を表現可能な関数を式 (12.a) の補間関数に付加した要素である。このような要素は、要素境界で関数が不連続となり、非適合要素と呼ばれる。以下では、Wilson ら (1973) が提案した非適合要素を用いて、離散化式を求める。

式 (19) を次式のように置き換える。

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u}^e + \mathbf{P} \mathbf{a}^e \tag{29}$$

ただし、

$$\begin{cases} P^{(1)} = 1 - \xi^2 \\ P^{(2)} = 1 - \eta^2 \\ P^{(3)} = 1 - \zeta^2 \end{cases}, \mathbf{P}^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} P^{(\alpha)} & 0 & 0 \\ 0 & P^{(\alpha)} & 0 \\ 0 & 0 & P^{(\alpha)} \end{pmatrix}, \mathbf{P} = (\mathbf{P}^{(1)} \ \mathbf{P}^{(2)} \ \mathbf{P}^{(3)}) \quad (30)$$

であり, 列ベクトル \mathbf{a}^e は曲げ変形を表現するために追加される自由度

$$\mathbf{a}^e = (a_x^{(1)} \ a_y^{(1)} \ a_z^{(1)} \ a_x^{(2)} \ a_y^{(2)} \ a_z^{(2)} \ a_x^{(3)} \ a_y^{(3)} \ a_z^{(3)})^T \quad (18)$$

である. すると, 式 (16) は

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{pmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{u}^e + \mathbf{G} \mathbf{a}^e \quad (31)$$

のように変更される. ただし,

$$\mathbf{G}^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P^{(\alpha)}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial P^{(\alpha)}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial P^{(\alpha)}}{\partial z} \\ \frac{\partial P^{(\alpha)}}{\partial y} & \frac{\partial P^{(\alpha)}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial P^{(\alpha)}}{\partial z} & \frac{\partial P^{(\alpha)}}{\partial y} \\ \frac{\partial P^{(\alpha)}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial P^{(\alpha)}}{\partial x} \end{pmatrix}, \mathbf{G} = (\mathbf{G}^{(1)} \ \mathbf{G}^{(2)} \ \mathbf{G}^{(3)}) \quad (32)$$

である. 式 (13) は, 式 (14) と式 (31) より

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega &= \sum_e \int_{\Omega^e} \begin{pmatrix} \delta \varepsilon_{xx} & \delta \varepsilon_{yy} & \delta \varepsilon_{zz} & 2\delta \varepsilon_{xy} & 2\delta \varepsilon_{yz} & 2\delta \varepsilon_{zx} \end{pmatrix} \mathbf{D} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{pmatrix} d\Omega \\
&= \sum_e \int_{\Omega^e} (\mathbf{B} \delta \mathbf{u}^e + \mathbf{G} \delta \mathbf{a}^e)^T \mathbf{D} (\mathbf{B} \mathbf{u}^e + \mathbf{G} \mathbf{a}^e) \, d\Omega \\
&= \sum_e \left\{ \delta \mathbf{u}^{eT} \left(\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Omega \mathbf{u}^e + \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{G} \, d\Omega \mathbf{a}^e \right) \right. \\
&\quad \left. + \delta \mathbf{a}^{eT} \left(\int_{\Omega^e} \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Omega \mathbf{u}^e + \int_{\Omega^e} \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{G} \, d\Omega \mathbf{a}^e \right) \right\} \\
&= \sum_e \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u}^e \\ \delta \mathbf{a}^e \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{uu}^e & \mathbf{K}_{ua}^e \\ \mathbf{K}_{au}^e & \mathbf{K}_{aa}^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{a}^e \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{33}$$

のように式変形できる。ただし、 \mathbf{K}_{uu}^e 、 \mathbf{K}_{ua}^e 、 \mathbf{K}_{au}^e 、 \mathbf{K}_{aa}^e は要素剛性マトリックスであり、

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{uu}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Omega \\ \mathbf{K}_{ua}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{G} \, d\Omega \\ \mathbf{K}_{au}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\Omega \\ \mathbf{K}_{aa}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{G} \, d\Omega \end{cases} \tag{34}$$

である。

式 (33) と式 (35) より、有限要素ごとの離散化式

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{uu}^e & \mathbf{K}_{ua}^e \\ \mathbf{K}_{au}^e & \mathbf{K}_{aa}^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{a}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_u^e \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{35}$$

を得ることができる。式 (35) より

$$\mathbf{a}^e = -\mathbf{K}_{aa}^{e-1} \mathbf{K}_{au}^e \mathbf{u}^e \tag{36}$$

であるから、列ベクトル \mathbf{a}^e を消去することができる。この式変形は、静的縮約と呼ばれる。

すると、

$$\sum_e \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \sum_e \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{f}^e \tag{37}$$

となり、式 (28) が得られる。ただし、

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_{uu}^e - \mathbf{K}_{ua}^e \mathbf{K}_{aa}^{e-1} \mathbf{K}_{au}^e \tag{38.a}$$

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}_u^e \tag{38.b}$$

である。

要素形状が平行六面体でない場合 (要素内で共変基底ベクトルが一定でない場合), 一定応力状態で $\mathbf{a}^e \neq \mathbf{0}$ となるため, Wilson ら (1973) が提案した非適合要素はパッチテストを通らない. そこで, Taylor ら (1976) は

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{G}^T d\Omega = \mathbf{0} \quad (39)$$

のような条件を課すことによって, パッチテストを通すことを可能にしている^[2].

FrontISTR では, 微小変形弾性解析の場合, 式 (39) の条件を課した Wilson らの非適合要素を採用している.

2. 各サブルーチンの解説

微小変形静弾性解析において, 3次元六面体8節点要素を使用する場合を考える.

D マトリックスを計算するサブルーチンは `lib/physics/ElasticLinear.f90` の `m_ElasticLinear :: calElasticMatrix()` と `lib/physics/calMatMatrix.f90` の `m_MatMatrix :: MatlMatrix()`,

B マトリックスを計算するサブルーチンは `lib/static_LIB_3dIC.f90` の `m_static_LIB_3dIC :: STF_C3D8IC()`,

要素剛性マトリックス \mathbf{K}^e の計算を行うサブルーチンは, `analysis/static/static_mat_ass_main.f90` の `m_static_mat_ass_main :: FSTR_MAT_ASS_MAIN()` と `m_static_mat_ass_main :: FSTR_LOCAL_STF_CREATE()`

である. 以下では, これらのサブルーチンについて解説する.

2. 1 lib/physics/ElasticLinear.f90 の m_ElasticLinear :: calElasticMatrix()

`lib/physics/ElasticLinear.f90` のモジュール `m_ElasticLinear` の概要を Fig.3 に示す. また, モジュール `m_ElasticLinear` のメンバであるサブルーチン `calElasticMatrix()` の概要を Fig.4 に示す.

2. 2 lib/physics/calMatMatrix.f90 の m_MatMatrix :: MatlMatrix()

`lib/physics/calMatMatrix.f90` のモジュール `m_MatMatrix` の概要を Fig.5 に示す. また, モジュール `m_MatMatrix` のメンバであるサブルーチン `MatlMatrix()` の概要を Fig.6 に示す.

2. 3 lib/static_LIB_3dIC.f90 の m_static_LIB_3dIC :: STF_C3D8IC()

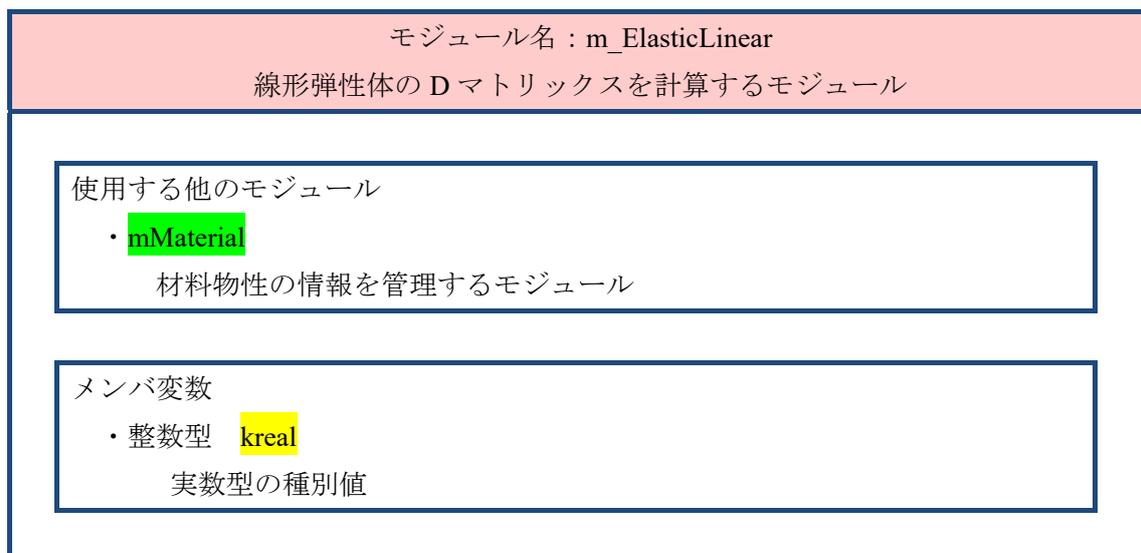
lib/static_LIB_3dIC.f90 のモジュール m_static_LIB_3dIC の概要を Fig.7 に示す。また、モジュール m_static_LIB_3dIC のメンバであるサブルーチン STF_C3D8IC() の概要を Fig.8 に示す。

2.4 analysis/static/static_mat_ass_main.f90 の m_static_mat_ass_main :: FSTR_MAT_ASS_MAIN() と m_static_mat_ass_main :: FSTR_LOCAL_STF_CREATE()

analysis/static/static_mat_ass_main.f90 のモジュール m_static_mat_ass_main の概要を Fig.9 に示す。また、モジュール m_static_mat_ass_main のメンバであるサブルーチン FSTR_MAT_ASS_MAIN() の概要を Fig.10 に示し、サブルーチン FSTR_LOCAL_STF_CREATE() の概要を Fig.11 に示す。

参考文献

- [1] Wilson, E.L., Taylor, R.L., Doherty, W.P. and Ghaboussi, J., “Incompatible displacement models,” Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics (ed. Fenves, S.T. *et al.*), pp.43-57, (1973).
- [2] Taylor, R.L., Beresford, P.J. and Wilson, E.L., “A non-conforming element for stress analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering,” Vol.10, pp.1211-1219, (1976).



メンバ関数

- ・サブルーチン `calElasticMatrix()`
3次元問題，平面ひずみ問題，平面応力問題，軸対称問題の D マトリックスを計算するサブルーチン
- ・サブルーチン `calElasticMatrix_ortho()`
直交異方性がある場合，3次元問題の D マトリックスを計算するサブルーチン
- ・サブルーチン `LinearElastic_Shell()`
シェル要素を使用する場合，埋め込み座標系成分の D マトリックスを計算するサブルーチン

Fig.3 Collaborator and Responsibility of m_ElasticLinear

サブルーチン名：`calElasticMatrix()`

3次元問題，平面ひずみ問題，平面応力問題，軸対称問題の D マトリックスを計算するサブルーチン

引数

- ・構造体(`tMaterial`) `matl`
材料に関連するデータ
- ・整数型 `sectType`
問題の種類 (3次元問題/平面ひずみ/平面応力問題/軸対称問題)
- ・実数型 `D(:, :)`
Dマトリックスの成分

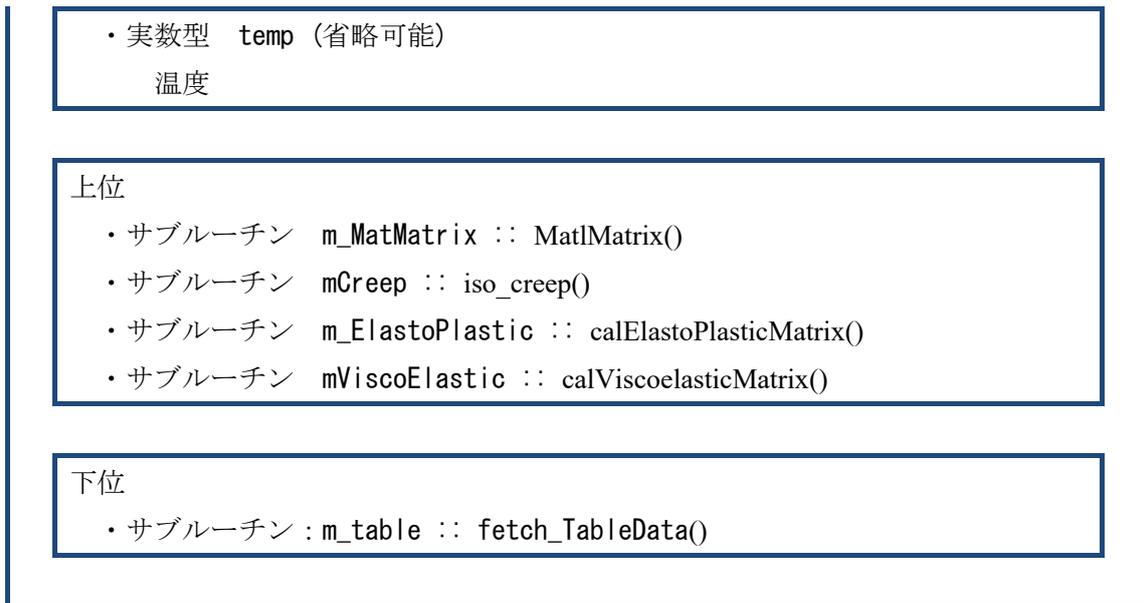
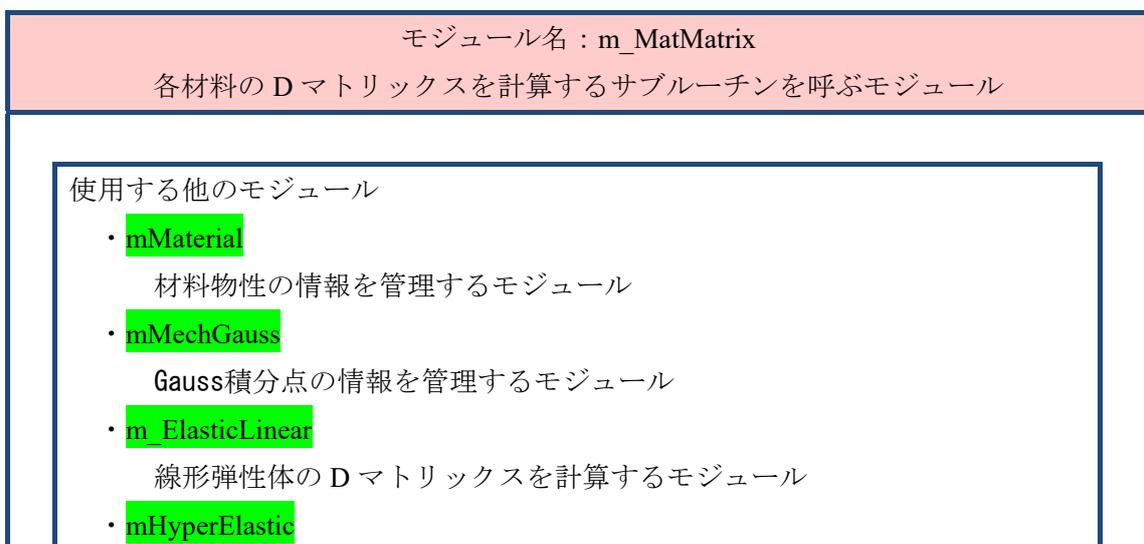


Fig.4 Arguments and associated subroutines of `m_ElasticLinear :: calElasticMatrix()`



超弾性体の4階の弾性テンソル C を計算するモジュール

- **m_ElastoPlastic**

弾塑性体の D マトリックスを計算するモジュール

- **mViscoElastic**

粘弾性体の D マトリックスを計算するモジュール

- **mCreep**

クリープを考慮した剛性マトリックス K^e を計算するためのモジュール

- **mUElastic**

ユーザ定義の弾性体の D マトリックスを計算するモジュール

- **mUmat**

ユーザ定義の材料の D マトリックスを計算するモジュール

メンバ変数

- 整数型 **kreal**

実数型の種別値

メンバ関数

- サブルーチン **getNlgeomFlag()**

未使用のサブルーチン

- サブルーチン **MatlMatrix()**

各材料の D マトリックスを計算するサブルーチンと呼ぶサブルーチン

- サブルーチン **StressUpdate()**

各材料の応力とひずみを計算するサブルーチンと呼ぶサブルーチン

- サブルーチン **mat_c2d()**

材料が超弾性体の場合, 4 階の弾性テンソルを問題の種類 (3 次元問題/
平面ひずみ/平面応力問題/軸対称問題) に応じた D マトリックスに変換
するサブルーチン

- サブルーチン **MatlMatrix_Shell()**

シェル要素を使用する場合, 各材料 (現バージョンでは, 線形弾性体のみ)
の応力とひずみを計算するサブルーチンと呼ぶ サブルーチン

- サブルーチン **mat_c2d_Shell()**

シェル要素を使用する場合, 4 階の弾性テンソルを D マトリックスに変換
するサブルーチン

Fig.5 Collaborator and Responsibility of m_MatMatrix

サブルーチン名：**MatlMatrix()**

各材料のDマトリックスを計算するサブルーチンと呼ぶサブルーチン

引数

- ・ 構造体(tGaussStatus) **gauss**
Gauss積分点に関連するデータ
- ・ 整数型 **sectType**
問題の種類 (3次元問題/平面ひずみ/平面応力問題/軸対称問題)
- ・ 実数型 **matrix(:, :)**
Dマトリックスの成分
- ・ 実数型 **dt**
時間増分

- 実数型 `cdsys(3, 3)`
直交異方性がある場合に使用する座標系
- 実数型 `temperature` (省略可能)
温度

上位

- サブルーチン `m_static_LIB_2d :: STF_C2()`
- サブルーチン `m_static_LIB_2d :: UPDATE_C2()`
- サブルーチン `m_static_LIB_2d :: UpdateST_C2()`
- サブルーチン `m_static_LIB_3d :: STF_C3()`
- サブルーチン `m_static_LIB_3d :: TLOAD_C3()`
- サブルーチン `m_static_LIB_3d :: UPDATE_C3()`
- サブルーチン `m_static_LIB_3d :: UpdateST_C3()`
- サブルーチン `m_static_LIB_3dIC :: STF_C3D8IC()`
- サブルーチン `m_static_LIB_3dIC :: UpdateST_C3D8IC()`
- サブルーチン `m_static_LIB_C3D8 :: STF_C3D8Bbar()`
- サブルーチン `m_static_LIB_C3D8 :: Update_C3D8Bbar()`
- サブルーチン `m_static_LIB_C3D8 :: TLOAD_C3D8Bbar()`

下位

- サブルーチン `m_MatMatrix :: mat_c2d()`
- サブルーチン `mUElastic :: uElasticMatrix()`
- サブルーチン `mViscoElastic :: calViscoelasticMatrix()`
- サブルーチン `m_ElasticLinear :: calElasticMatrix()`
- サブルーチン `m_ElasticLinear :: calElasticMatrix_ortho()`
- サブルーチン `mHyperElastic :: calElasticMooneyRivlin()`
- サブルーチン `mHyperElastic :: calElasticArrudaBoyce()`
- サブルーチン `m_ElastoPlastic :: calElastoPlasticMatrix()`
- サブルーチン `mUmat :: uMatIMatrix()`
- サブルーチン `mCreep :: iso_creep()`

Fig.6 Arguments and associated subroutines of `m_MatMatrix :: MatIMatrix()`

モジュール名 : m_static_LIB_3dIC

3次元六面体8節点要素 (非適合要素) の場合, B マトリックスおよび
要素剛性マトリックス \mathbf{K}^e を計算したり, Gauss 積分点における応力とひずみを
計算したりするモジュール

使用する他のモジュール

- **hecmw**
HECMW のモジュール
- **m_utilities**
補助的なサブルーチンや関数を集めたモジュール
- **elementInfo**
要素の情報を管理するモジュール
- **mMechGauss**

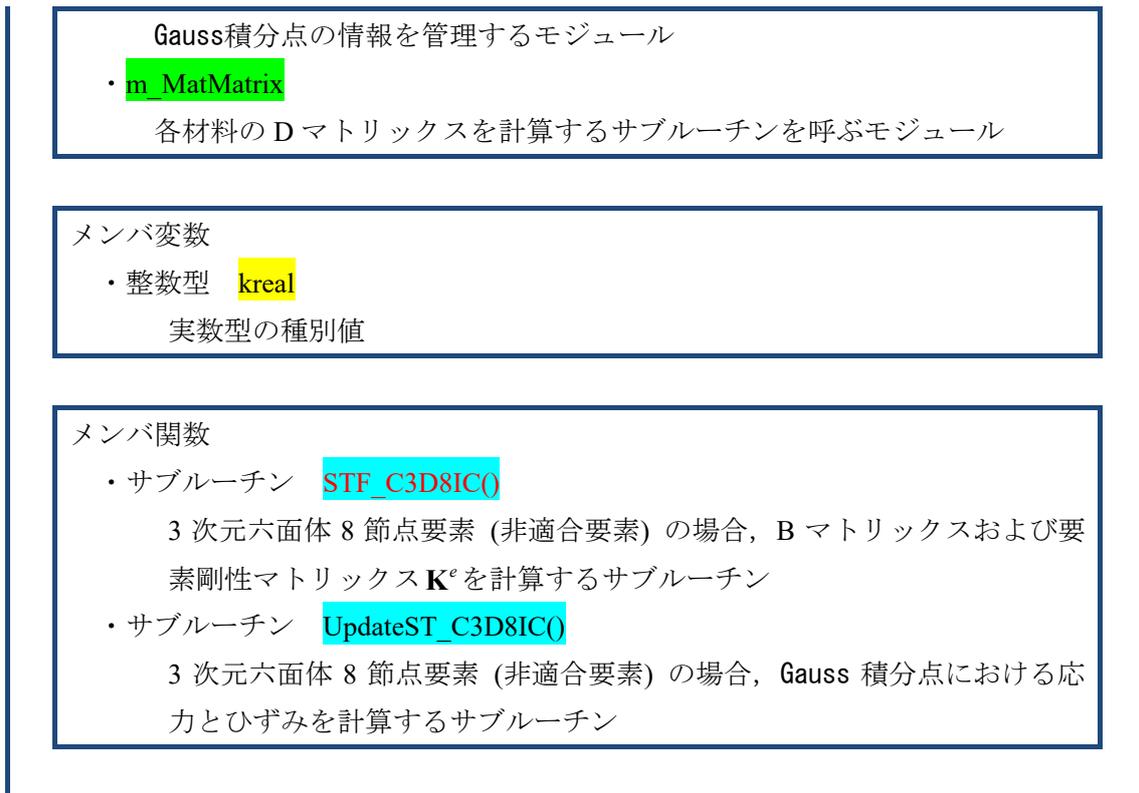
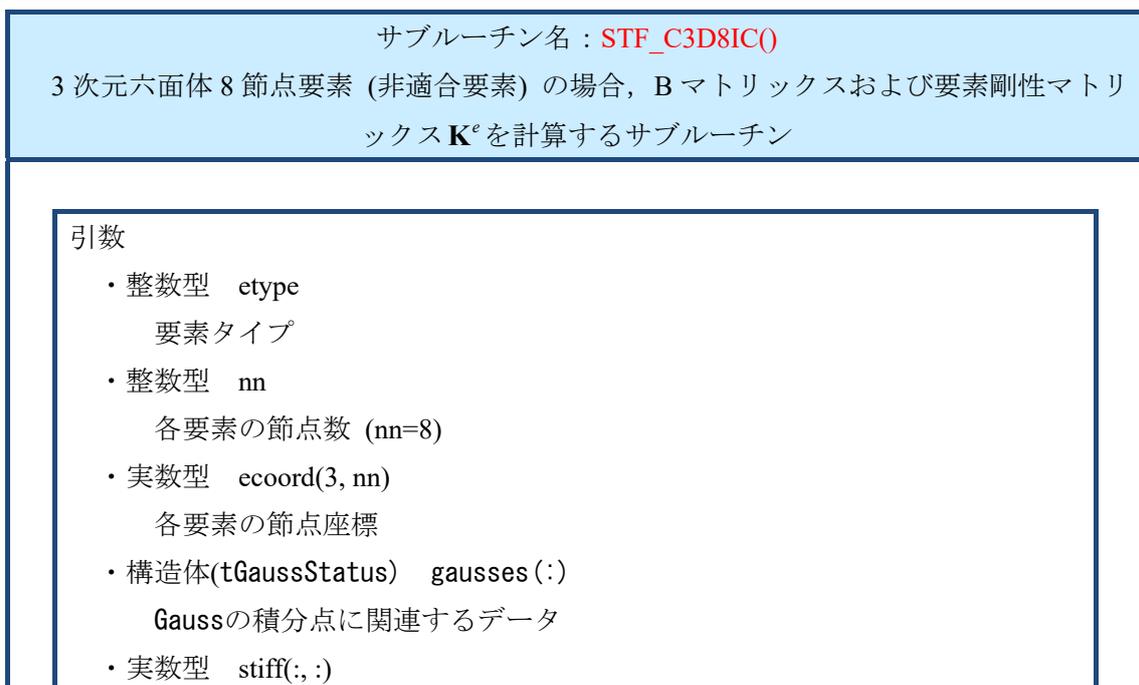


Fig.7 Collaborator and Responsibility of m_static_LIB_3dIC



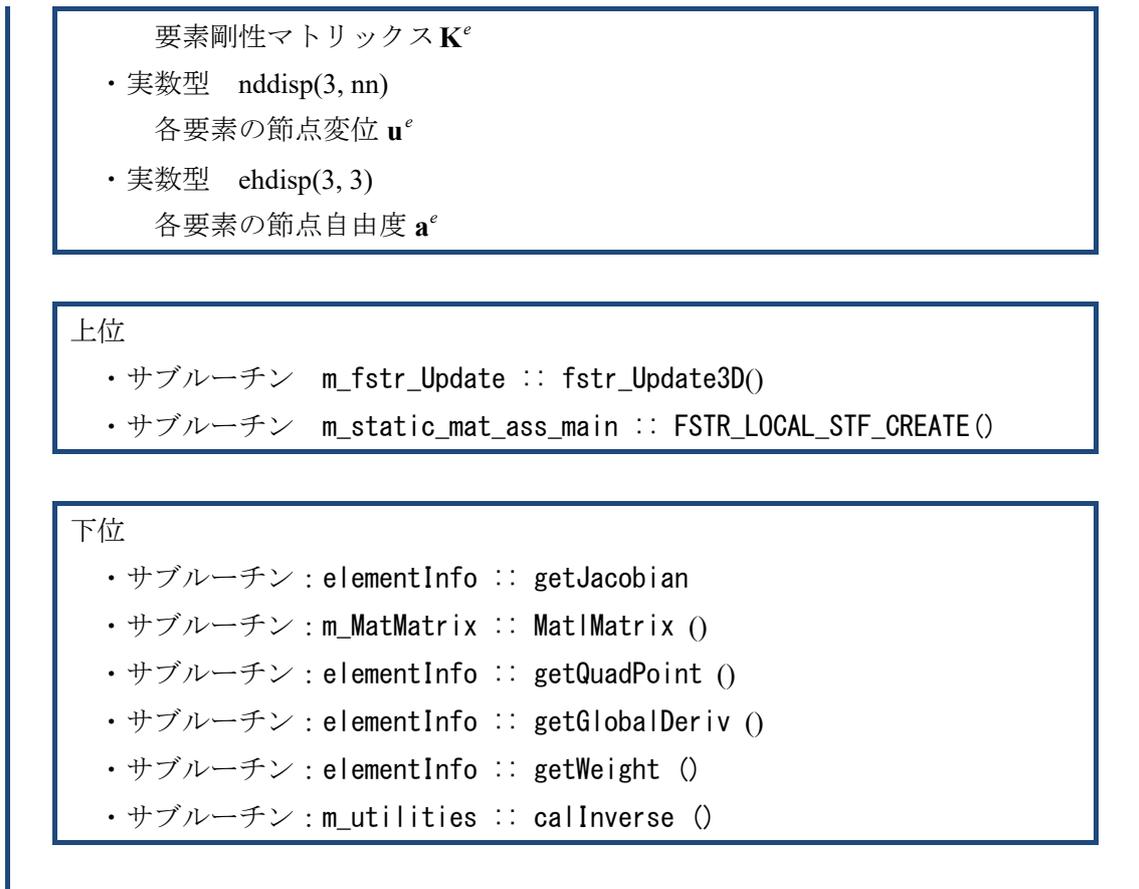


Fig.8 Arguments and associated subroutines of `m_static_LIB_3dIC :: STF_C3D8IC()`

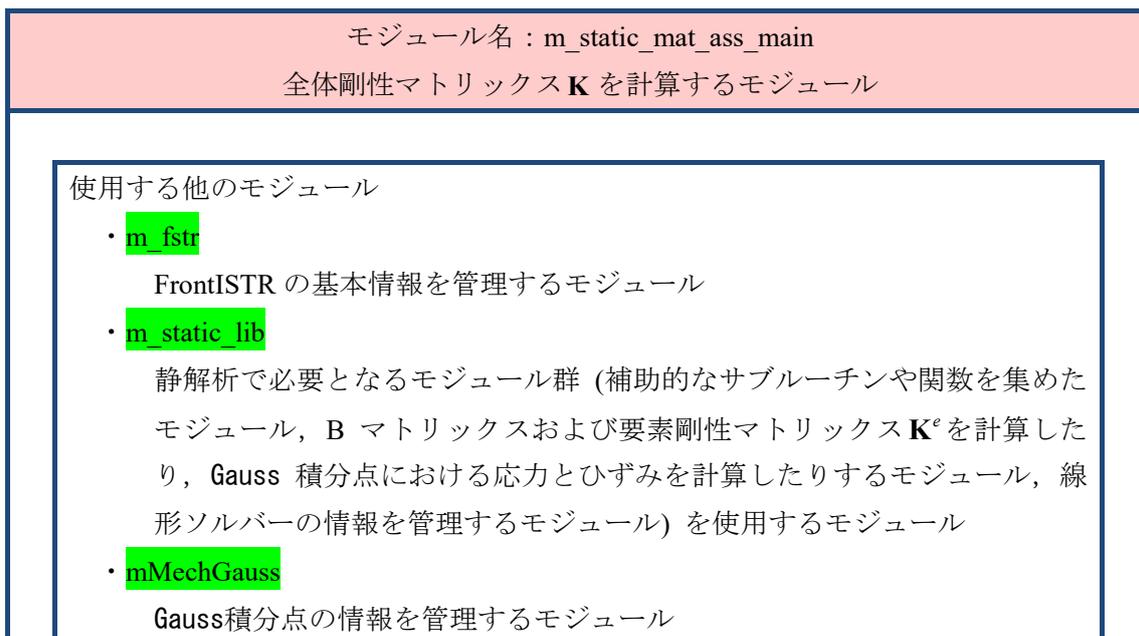




Fig.9 Collaborator and Responsibility of m_static_mat_ass_main



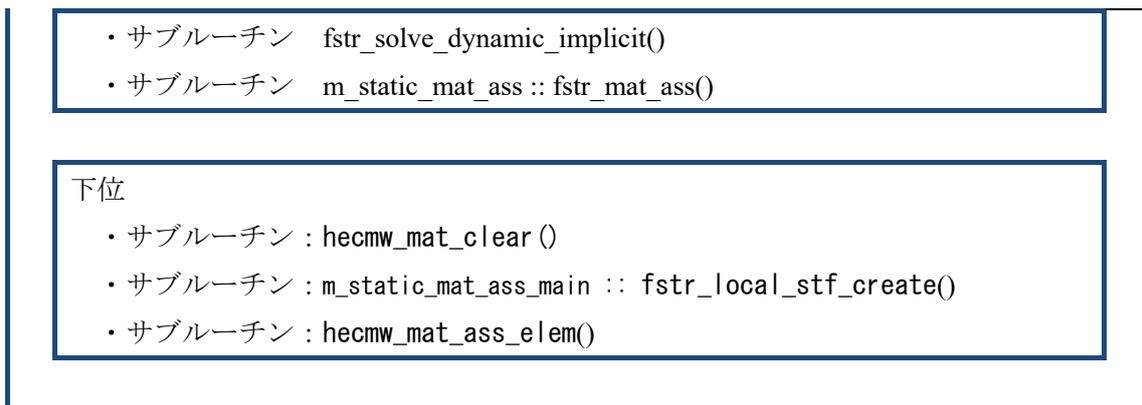
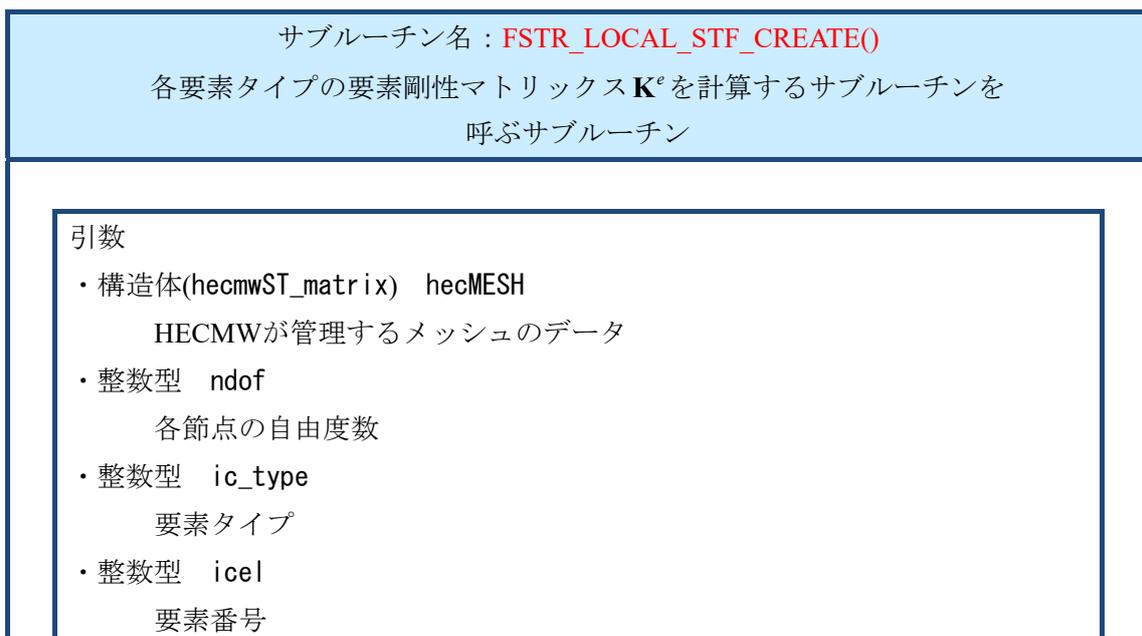


Fig.10 Arguments and associated subroutines of m_static_mat_ass_main :: FSTR_MAT_ASS_MAIN()



- 実数型 `xx(:)`, `yy(:)`, `zz(:)`
各要素の節点座標
- 構造体(`tGaussStatus`) `gausses(:)`
Gaussの積分点に関するデータ
- 整数型 `iset`
問題の種類 (3次元問題/平面ひずみ/平面応力問題/軸対称問題)
- 実数型 `stiffness(:, :)`
要素剛性マトリックス \mathbf{K}^e

上位

- サブルーチン `m_static_mat_ass_main :: FSTR_MAT_ASS_MAIN()`

下位

- サブルーチン `m_static_LIB_2d :: STF_C2()`
- サブルーチン `m_static_LIB_1d :: STF_C1()`
- サブルーチン `m_static_LIB_3dIC :: STF_C3D8IC()`
- サブルーチン `m_static_LIB_3d :: STF_C3()`
- サブルーチン `m_static_LIB_shell :: STF_Shell_MITC()`
- サブルーチン `m_static_LIB_beam :: STF_Beam()`
- サブルーチン `hecmw_abort()`

Fig.11 Arguments and associated subroutines of `m_static_mat_ass_main :: FSTR_LOCAL_STF_CREATE`