

FrontISTRにおける 有限変形弾性解析の定式化と その解析事例

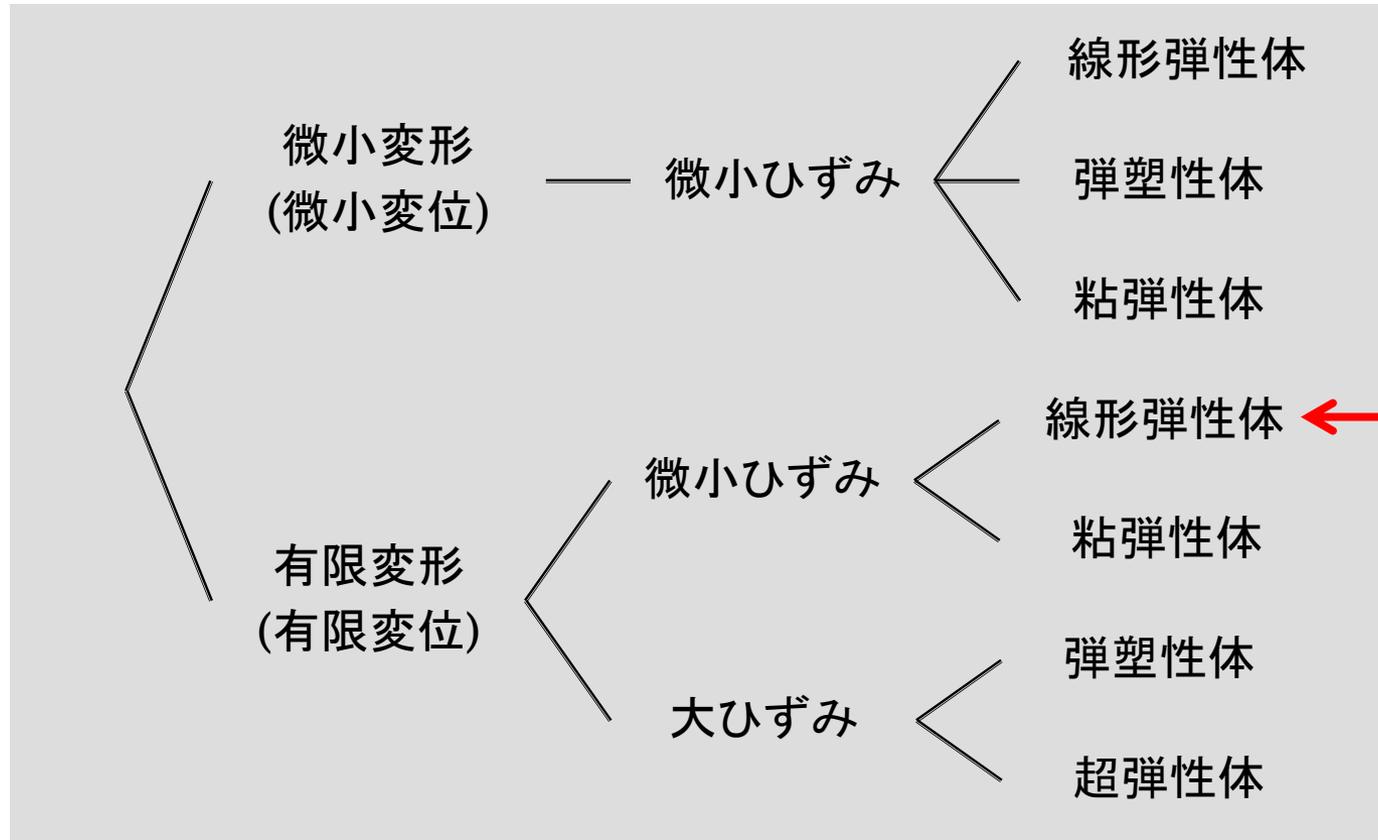
東京大学
新領域創成科学研究科
人間環境学専攻
橋本 学

2013年12月3日
第7回FrontISTR研究会

この講演では

- 『FrontISTRに実装されている定式化を十分に理解し、解きたい問題に対して**ソースコードを自由にカスタマイズ** (要素タイプを追加, 材料の種類を追加, ユーザサブルーチンを追加) **できるようになること**』を最終目標とします
- 以前, FrontISTRに実装されている**微小変形弾性解析 (線形弾性体)** の定式化, ソースコードの関連するサブルーチンについて紹介しました (第3回FrontISTR研究会 プログラミング編, 5/22開催)
- 今回からFrontISTRに実装されている**有限変形弾性解析 (線形弾性体)** に焦点を当てます

静応力解析の分類



今回は、
ここに焦点を
当てます

有限変形

$${}^t\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left\{ ({}^0\nabla \otimes {}^t\mathbf{u}) + ({}^0\nabla \otimes {}^t\mathbf{u})^T + ({}^0\nabla \otimes {}^t\mathbf{u}) \cdot ({}^0\nabla \otimes {}^t\mathbf{u})^T \right\}$$

ひずみ

変位こう配の2次項がある

大ひずみ

$${}^t\mathbf{S} = f({}^t\mathbf{E}, {}^t\mathbf{E} \cdot {}^t\mathbf{E}, \dots)$$

応力 ひずみの2次以上の項がある

Total Lagrange法による線形弾性静解析を行うには

FrontISTRの解析制御データ (*.cntファイル)

```
!SOLUTION,TYPE=NLSTATIC
      ....
!MATERIAL, NAME=MAT1
!ELASTIC
1000000.0, 0.490000
      ....
!STEP, SUBSTEPS=50, CONVERG=1.0e-8
BOUNDARY,1
LOAD, 1
      ....
```

有限変形静応力解析

**!ELASTICのみで
Total Lagrange法による
線形弾性解析を
行えます**

荷重増分解析のステップ数,
Newton-Raphson法の
収束判定条件

Updated Lagrange法による線形弾性静解析を行うには

FrontISTRの解析制御データ (*.cntファイル)

```
!SOLUTION,TYPE=NLSTATIC
      ....
!MATERIAL, NAME=MAT2
!ELASTIC
206900.0, 0.29
!PLASTIC, YIELD=MISES
1.0e10, 0.5
      ....
!STEP, SUBSTEPS=50, CONVERG=1.0e-8
BOUNDARY,1
LOAD, 1
      ....
```

← 有限変形静応力解析

← !ELASTICと!PLASTIC,
降伏応力を大きく設定
しておくと,
Updated Lagrange法
による線形弾性解析を
行えます

←

荷重増分解析のステップ数,
Newton-Raphson法の
収束判定条件

FrontISTRにおける有限変形弾性解析の定式化とその解析事例

目次

1. Total Lagrange法およびUpdated Lagrange法のための定式化
2. 有限要素離散化
3. FrontISTRのソースコードの関連するサブルーチン
4. 解析事例

FrontISTRにおける有限変形弾性解析の定式化とその解析事例

目次

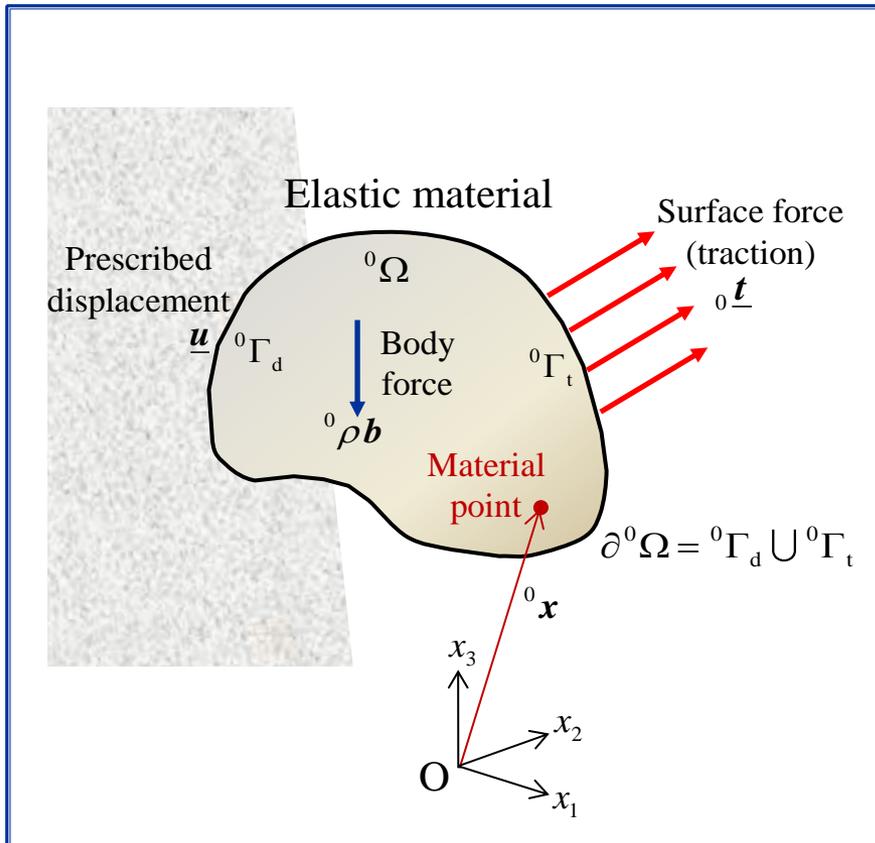
1. Total Lagrange法およびUpdated Lagrange法のための定式化
2. 有限要素離散化
3. FrontISTRソースコードの関連するサブルーチン
4. 解析事例

今回は、1と4を発表します
2と4は次のプログラミング編で解説します

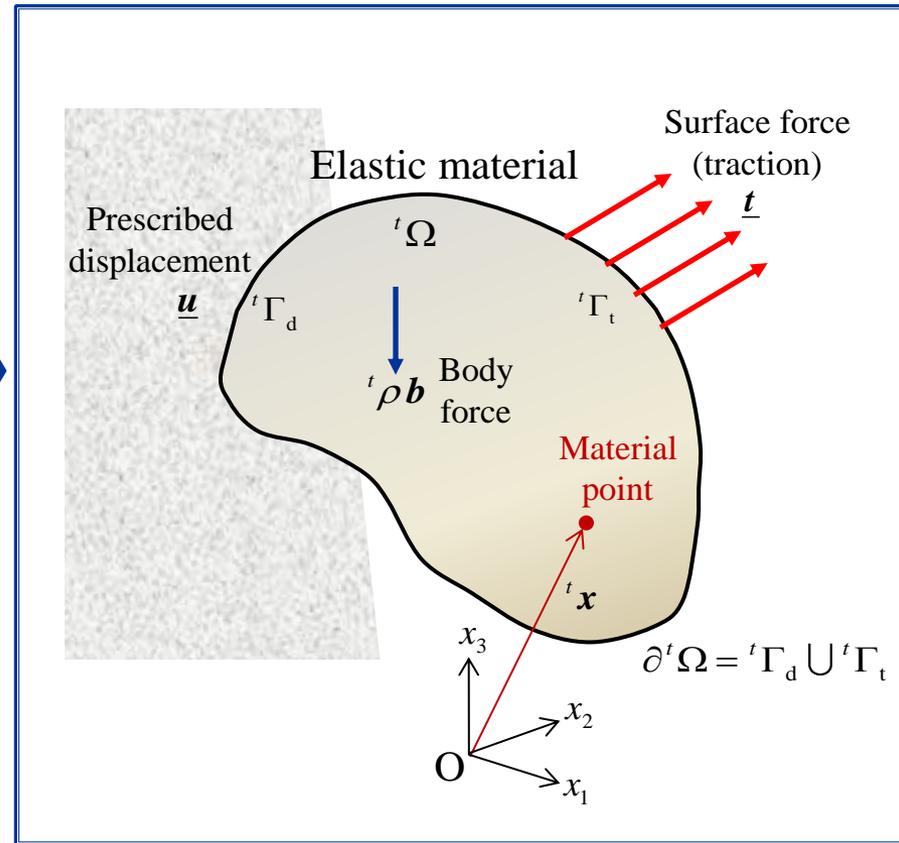
Total Lagrange法および Updated Lagrange法のための定式化

弾性体の境界値問題

変形前の状態 (時刻 0)



変形後の状態 (時刻 t)



変位

$${}^t\underline{u} = {}^t\underline{x} - {}^0\underline{x}$$

記号の説明

t	時刻 [s]
N	次元 (3次元: $N = 3$)
Ω	有界領域 [m^N]
Γ	境界 [m^{N-1}]
\mathbf{x}	物質点の位置ベクトル [m]
∇	ナブラ [1/m]
\mathbf{u}	変位 [m]
t	トラクション [Pa]
\mathbf{b}	単位質量当たりの体積力 [N/kg]
ρ	密度 [kg/m^3]
\mathbf{n}	外向き単位法線ベクトル [-]

時刻 t の物理量

$${}^t_0 \mathbf{E} = \frac{1}{2} \left\{ ({}^0 \nabla \otimes {}^t \mathbf{u}) + ({}^0 \nabla \otimes {}^t \mathbf{u})^T + ({}^0 \nabla \otimes {}^t \mathbf{u}) \cdot ({}^0 \nabla \otimes {}^t \mathbf{u})^T \right\}$$

基準となる時刻が時刻0の意味

a, b	スカラー
\mathbf{a}, \mathbf{b}	ベクトル
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	2階のテンソル
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$	
$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij}$	

変形前を基準配置とした弾性体の支配方程式系

[B1] 以下を満たすような変位 ${}^t\mathbf{u} \in V$ を求めよ

$$V = \{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in H^1({}^0\Omega)^N, \mathbf{w} = \underline{\mathbf{u}} \text{ on } {}^0\Gamma_d \}$$

(平衡方程式)

$${}^0\nabla \cdot \underline{{}^t\Pi} + {}^0\rho \mathbf{b} = 0 \quad \text{in } {}^0\Omega \quad \dots \quad (1a)$$

第1Piola-Kirchhoff応力テンソル

$$\underline{{}^t\Pi} = \underline{{}^t\mathbf{S}} \cdot \underline{{}^t\mathbf{F}}^T \quad \leftarrow \text{転置記号} \quad \dots \quad (1b)$$

第2Piola-Kirchhoff応力テンソル

$$\underline{{}^t\mathbf{F}} = \mathbf{I} + ({}^0\nabla \otimes \underline{{}^t\mathbf{u}})^T \quad \dots \quad (1c)$$

変形こう配テンソル

(境界条件)

$$\underline{{}^t\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}} \quad \text{on } {}^0\Gamma_d \quad \dots \quad (1d)$$

$${}^t\mathbf{t} = {}^0\mathbf{n} \cdot \underline{{}^t\Pi} = \underline{{}^t\mathbf{t}} \quad \text{on } {}^0\Gamma_t \quad \dots \quad (1e)$$

現配置での弾性体の支配方程式系

[B2] 以下を満たすような変位 ${}^t\mathbf{u} \in V$ を求めよ

$$V = \{ \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in H^1({}^t\Omega)^N, \mathbf{w} = \underline{\mathbf{u}} \text{ on } {}^t\Gamma_d \}$$

(平衡方程式)

$${}^t\nabla \cdot \underline{\mathbf{T}} + {}^t\rho\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in } {}^t\Omega \quad \dots \quad (2a)$$

Cauchy応力テンソル

(境界条件)

$${}^t\mathbf{u} = \underline{\mathbf{u}} \quad \text{on } {}^t\Gamma_d \quad \dots \quad (2b)$$

$${}^t\mathbf{t} = {}^t\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{t}} \quad \text{on } {}^t\Gamma_t \quad \dots \quad (2c)$$

変形前を基準配置とした弾性体の仮想仕事の原理

[V1] 以下を満たすような変位 ${}^t\mathbf{u} \in V$ を求めよ

$$V = \{ {}^t\mathbf{w} \mid {}^t\mathbf{w} \in H^1({}^0\Omega)^N, {}^t\mathbf{w} = \underline{\mathbf{u}} \text{ on } {}^0\Gamma_d \}$$

$$M = \{ \delta {}^t\mathbf{u} \mid \delta {}^t\mathbf{u} \in H^1({}^0\Omega)^N, \delta {}^t\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ on } {}^0\Gamma_d \}$$

(仮想仕事の原理)

$$\int_{{}^0\Omega} {}^0\mathbf{S} : \delta {}^0\mathbf{E} \, d{}^0\Omega = \int_{{}^0\Gamma_t} {}^0\mathbf{t} \cdot \delta {}^t\mathbf{u} \, d{}^0\Gamma + \int_{{}^0\Omega} {}^0\rho\mathbf{b} \cdot \delta {}^t\mathbf{u} \, d{}^0\Omega \quad \forall \delta {}^t\mathbf{u} \in M$$

変分記号

Total Lagrange法で使用される式

... (3a)

Green-Lagrange
ひずみ

$$\begin{aligned} \delta {}^0\mathbf{E} &= \delta \left\{ \frac{1}{2} ({}^0\mathbf{F}^T \cdot {}^0\mathbf{F} - \mathbf{I}) \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\delta {}^0\mathbf{F}^T \cdot {}^0\mathbf{F} + {}^0\mathbf{F}^T \cdot \delta {}^0\mathbf{F}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ ({}^0\nabla \otimes \delta {}^t\mathbf{u}) + ({}^0\nabla \otimes \delta {}^t\mathbf{u})^T \right. \\ &\quad \left. + ({}^0\nabla \otimes \delta {}^t\mathbf{u}) \cdot ({}^0\nabla \otimes {}^t\mathbf{u})^T + ({}^0\nabla \otimes {}^t\mathbf{u}) \cdot ({}^0\nabla \otimes \delta {}^t\mathbf{u})^T \right\} \end{aligned}$$

... (3b)

現配置での弾性体の仮想仕事の原理

[V2] 以下を満たすような変位 ${}^t\mathbf{u} \in V$ を求めよ

$$V = \{ {}^t\mathbf{w} \mid {}^t\mathbf{w} \in H^1({}^t\Omega)^N, {}^t\mathbf{w} = \underline{\mathbf{u}} \text{ on } {}^t\Gamma_d \}$$

$$M = \{ \delta {}^t\mathbf{u} \mid \delta {}^t\mathbf{u} \in H^1({}^t\Omega)^N, \delta {}^t\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ on } {}^t\Gamma_d \}$$

(仮想仕事の原理)

$$\int_{{}^t\Omega} {}^t\mathbf{T} : \delta {}^t\mathbf{A}_{(L)} d {}^t\Omega = \int_{{}^t\Gamma_t} \underline{\mathbf{t}} \cdot \delta {}^t\mathbf{u} d {}^t\Gamma + \int_{{}^t\Omega} {}^t\rho \mathbf{b} \cdot \delta {}^t\mathbf{u} d {}^t\Omega \quad \forall \delta {}^t\mathbf{u} \in M$$

Updated Lagrange法で使用される式 ... (4a)

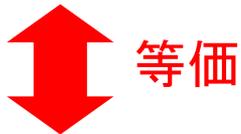
$$\begin{aligned} \delta {}^t\mathbf{A}_{(L)} &= \delta \left[\frac{1}{2} \left\{ \mathbf{I} - ({}^t\mathbf{F} \cdot {}^t\mathbf{F}^T)^{-1} \right\} \right]_{(L)} \\ \text{Almansiひずみの} & \\ \text{線形部分} & \\ &= \delta \left[\frac{1}{2} (\mathbf{I} - {}^t\mathbf{F}^{-T} \cdot {}^t\mathbf{F}^{-1}) \right]_{(L)} \\ &= \delta \left[\frac{1}{2} \left\{ ({}^t\nabla \otimes {}^t\mathbf{u}) + ({}^t\nabla \otimes {}^t\mathbf{u})^T - ({}^t\nabla \otimes {}^t\mathbf{u}) \cdot ({}^t\nabla \otimes {}^t\mathbf{u})^T \right\} \right]_{(L)} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ ({}^t\nabla \otimes \delta {}^t\mathbf{u}) + ({}^t\nabla \otimes \delta {}^t\mathbf{u})^T \right\} \quad \dots (4b) \end{aligned}$$

支配方程式系と仮想仕事の原理の関係について

[B1] 変形前を基準配置とした弾性体の支配方程式系



[B2] 現配置での弾性体の支配方程式系



[V1] 基準配置での弾性体の仮想仕事の原理



[V2] 現配置での弾性体の仮想仕事の原理

[V2]と[B2]は等価

[B1] 変形前を基準配置とした弾性体の支配方程式系

[B2] 現配置での弾性体の支配方程式系

[V1] 変形前を基準配置とした弾性体の仮想仕事の原理

[V2] 現配置での弾性体の仮想仕事の原理



等価

[V2]と[B2]は等価

以下の式変形を利用します

式 (4a) より
$$\int_{t\Omega} {}^t\mathbf{T} : \delta {}^t\mathbf{A}_{(L)} d {}^t\Omega = \int_{t\Gamma_t} \underline{t} \cdot \delta {}^t\mathbf{u} d {}^t\Gamma + \int_{t\Omega} {}^t\rho \mathbf{b} \cdot \delta {}^t\mathbf{u} d {}^t\Omega \quad \forall \delta {}^t\mathbf{u} \in M$$

左辺を式変形します

$$\begin{aligned} & \int_{t\Omega} {}^t\mathbf{T} : \frac{1}{2} \left\{ {}^t\nabla \otimes \delta {}^t\mathbf{u} + ({}^t\nabla \otimes \delta {}^t\mathbf{u})^T \right\} d {}^t\Omega \\ &= \int_{t\Omega} {}^t\mathbf{T} : ({}^t\nabla \otimes \delta {}^t\mathbf{u}) d {}^t\Omega \\ &= \int_{t\Omega} {}^tT_{ij} \frac{\partial \delta {}^t u_j}{\partial {}^t x_i} d {}^t\Omega \\ &= \int_{t\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial {}^t x_i} ({}^tT_{ij} \delta {}^t u_j) - \frac{\partial {}^tT_{ij}}{\partial {}^t x_i} \delta {}^t u_j \right\} d {}^t\Omega \\ &= \int_{t\Omega} {}^t\nabla \cdot ({}^t\mathbf{T} \cdot \delta {}^t\mathbf{u}) d {}^t\Omega - \int_{t\Omega} ({}^t\nabla \cdot {}^t\mathbf{T}) \cdot \delta {}^t\mathbf{u} d {}^t\Omega \\ &= \int_{\partial {}^t\Omega} ({}^t\mathbf{n} \cdot {}^t\mathbf{T}) \cdot \delta {}^t\mathbf{u} d {}^t\Gamma - \int_{t\Omega} ({}^t\nabla \cdot {}^t\mathbf{T}) \cdot \delta {}^t\mathbf{u} d {}^t\Omega \\ &= \int_{t\Gamma_t} ({}^t\mathbf{n} \cdot {}^t\mathbf{T}) \cdot \delta {}^t\mathbf{u} d {}^t\Gamma - \int_{t\Omega} ({}^t\nabla \cdot {}^t\mathbf{T}) \cdot \delta {}^t\mathbf{u} d {}^t\Omega \quad \dots (5) \end{aligned}$$

Gaussの
発散定理

式 (2a)

$$-{}^t\nabla \cdot {}^t\mathbf{T} = {}^t\rho \mathbf{b} \quad \text{in } {}^t\Omega$$

式 (2c)

$${}^t\mathbf{n} \cdot {}^t\mathbf{T} = \underline{t} \quad \text{on } {}^t\Gamma_t$$

が得られます

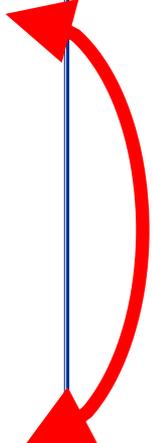
[V1]と[B1]は等価

[B1] 変形前を基準配置とした弾性体の支配方程式系

[B2] 現配置での弾性体の支配方程式系

[V1] 変形前を基準配置とした弾性体の仮想仕事の原理

[V2] 現配置での弾性体の仮想仕事の原理



等価

[V1] と[B1]は等価

以下の式変形を利用します

式 (3a) より
$$\int_{\Omega} {}^t\mathbf{S} : \delta {}^t\mathbf{E} \, d\Omega = \int_{\Gamma_t} {}_0\mathbf{t} \cdot \delta {}^t\mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Omega} {}^0\rho\mathbf{b} \cdot \delta {}^t\mathbf{u} \, d\Omega \quad \forall \delta {}^t\mathbf{u} \in M$$

左辺を式変形します

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} {}^t\mathbf{S} : \delta \left\{ \frac{1}{2} ({}^t\mathbf{F}^T \cdot {}^t\mathbf{F} - \mathbf{I}) \right\} \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} {}^t\mathbf{S} : \frac{1}{2} (\delta {}^t\mathbf{F}^T \cdot {}^t\mathbf{F} + {}^t\mathbf{F}^T \cdot \delta {}^t\mathbf{F}) \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} {}^t\mathbf{S} : \frac{1}{2} \{ {}^0\nabla \otimes \delta {}^t\mathbf{u} \cdot {}^t\mathbf{F} + {}^t\mathbf{F}^T \cdot ({}^0\nabla \otimes \delta {}^t\mathbf{u})^T \} \, d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ {}^tS_{ij} \left(\frac{\partial \delta {}^t u_k}{\partial x_i} {}^tF_{kj} + {}^tF_{ki} \frac{\partial \delta {}^t u_k}{\partial x_j} \right) \right\} \, d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left({}^tS_{ij} \frac{\partial \delta {}^t u_k}{\partial x_i} {}^tF_{kj} + {}^tS_{ji} {}^tF_{kj} \frac{\partial \delta {}^t u_k}{\partial x_i} \right) \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial \delta {}^t u_k}{\partial x_i} ({}^tS_{ij} {}^tF_{kj}) \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \{ \delta {}^t u_k ({}^tS_{ij} {}^tF_{kj}) \} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta {}^t u_k \frac{\partial}{\partial x_i} ({}^tS_{ij} {}^tF_{kj}) \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} {}^0\nabla \cdot \{ ({}^t\mathbf{S} \cdot {}^t\mathbf{F}^T) \cdot \delta {}^t\mathbf{u} \} \, d\Omega - \int_{\Omega} \{ {}^0\nabla \cdot ({}^t\mathbf{S} \cdot {}^t\mathbf{F}^T) \} \cdot \delta {}^t\mathbf{u} \, d\Omega \\ &= \int_{\Gamma_t} {}^0\mathbf{n} \cdot ({}^t\mathbf{S} \cdot {}^t\mathbf{F}^T) \cdot \delta {}^t\mathbf{u} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \{ {}^0\nabla \cdot ({}^t\mathbf{S} \cdot {}^t\mathbf{F}^T) \} \cdot \delta {}^t\mathbf{u} \, d\Omega \\ &= \int_{\Gamma_t} {}^0\mathbf{n} \cdot {}^t\Pi \cdot \delta {}^t\mathbf{u} \, d\Gamma - \int_{\Omega} ({}^0\nabla \cdot {}^t\Pi) \cdot \delta {}^t\mathbf{u} \, d\Omega \quad \dots \quad (6) \end{aligned}$$

Gaussの
発散定理

式 (1a)
$$-{}^0\nabla \cdot {}^t\Pi = {}^0\rho\mathbf{b} \quad \text{in } \Omega$$

式 (1e)
$${}^0\mathbf{n} \cdot {}^t\Pi = {}_0\mathbf{t} \quad \text{on } \Gamma_t$$

が得られます

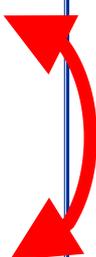
[V1]と[V2]は等価

[B1] 変形前を基準配置とした弾性体の支配方程式系

[B2] 現配置での弾性体の支配方程式系

[V1] 変形前を基準配置とした弾性体の仮想仕事の原理

[V2] 現配置での弾性体の仮想仕事の原理



等価

[V2]と[V1]は等価

以下の式変形を利用します

式 (4a) より $\int_{t\Omega} {}^t\mathbf{T} : \delta {}^t\mathbf{A}_{(L)} d {}^t\Omega = \int_{t\Gamma_t} \underline{\mathbf{t}} \cdot \delta {}^t\mathbf{u} d {}^t\Gamma + \int_{t\Omega} {}^t\rho \mathbf{b} \cdot \delta {}^t\mathbf{u} d {}^t\Omega \quad \forall \delta {}^t\mathbf{u} \in \mathbf{M}$

$$\begin{aligned} & \int_{0\Omega} {}^t\mathbf{T} : \delta {}^t\mathbf{A}_{(L)} \det {}^t_0\mathbf{F} d {}^0\Omega \\ &= \int_{0\Omega} \left(\frac{1}{\det {}^t_0\mathbf{F}} {}^t_0\mathbf{F} \cdot {}^t_0\mathbf{S} \cdot {}^t_0\mathbf{F}^T \right) : \delta {}^t\mathbf{A}_{(L)} \det {}^t_0\mathbf{F} d {}^0\Omega \\ &= \int_{0\Omega} ({}^t_0\mathbf{F} \cdot {}^t_0\mathbf{S} \cdot {}^t_0\mathbf{F}^T) : \delta {}^t\mathbf{A}_{(L)} d {}^0\Omega \\ &= \int_{0\Omega} {}^tF_{ik} {}^tS_{kl} {}^tF_{jl} (\delta {}^tA_{(L)})_{ij} d {}^0\Omega \\ &= \int_{0\Omega} {}^tS_{kl} {}^tF_{ik} (\delta {}^tA_{(L)})_{ij} {}^tF_{jl} d {}^0\Omega \\ &= \int_{0\Omega} {}^t_0\mathbf{S} : ({}^t_0\mathbf{F}^T \cdot \delta {}^t\mathbf{A}_{(L)} \cdot {}^t_0\mathbf{F}) d {}^0\Omega \quad \dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{t\Gamma_t} \delta {}^t\mathbf{u} \cdot \underline{\mathbf{t}} d {}^t\Gamma \\ &= \int_{0\Gamma_t} \delta {}^t\mathbf{u}_0 \cdot \underline{\mathbf{t}} d {}^0\Gamma \\ &= \int_{0\Gamma_t} {}^t_0\underline{\mathbf{t}} \cdot \delta {}^t\mathbf{u} d {}^0\Gamma \quad \dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{0\Omega} {}^t\rho \mathbf{b} \cdot \delta {}^t\mathbf{u} (\det {}^t_0\mathbf{F}) d {}^0\Omega \\ &= \int_{0\Omega} {}^t\rho (\det {}^t_0\mathbf{F}) \mathbf{b} \cdot \delta {}^t\mathbf{u} d {}^0\Omega \\ &= \int_{0\Omega} {}^t_0\rho \mathbf{b} \cdot \delta {}^t\mathbf{u} d {}^0\Omega \quad \dots (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & {}^t_0\mathbf{F}^T \cdot \delta {}^t\mathbf{A}_{(L)} \cdot {}^t_0\mathbf{F} \\ &= {}^t_0\mathbf{F}^T \cdot \frac{1}{2} \{ {}^t\nabla \otimes \delta {}^t\mathbf{u} + ({}^t\nabla \otimes \delta {}^t\mathbf{u})^T \} \cdot {}^t_0\mathbf{F} \\ &= \frac{1}{2} \{ {}^t_0\mathbf{F}^T \cdot {}^t\nabla \otimes \delta {}^t\mathbf{u} \cdot {}^t_0\mathbf{F} + {}^t_0\mathbf{F}^T \cdot ({}^t_0\mathbf{F}^T \cdot {}^t\nabla \otimes \delta {}^t\mathbf{u})^T \} \\ &= \frac{1}{2} \left[{}^0\nabla \otimes \delta {}^t\mathbf{u} \cdot \{ \mathbf{I} + ({}^0\nabla \otimes {}^t\mathbf{u})^T \} + \{ \mathbf{I} + ({}^0\nabla \otimes {}^t\mathbf{u}) \} \cdot ({}^0\nabla \otimes \delta {}^t\mathbf{u})^T \right] \\ &= \frac{1}{2} \{ {}^0\nabla \otimes \delta {}^t\mathbf{u} + ({}^0\nabla \otimes \delta {}^t\mathbf{u})^T + {}^0\nabla \otimes \delta {}^t\mathbf{u} \cdot ({}^0\nabla \otimes {}^t\mathbf{u})^T + ({}^0\nabla \otimes {}^t\mathbf{u}) \cdot ({}^0\nabla \otimes \delta {}^t\mathbf{u})^T \} \\ &= \delta {}^t_0\mathbf{E} \quad \dots (8) \end{aligned}$$

$\left. \begin{aligned} & {}^t_0\mathbf{F}^T \cdot {}^t\nabla = ({}^0\nabla \otimes {}^t\mathbf{x}) \cdot {}^t\nabla \\ &= {}^0\nabla \end{aligned} \right\}$

式 (3a) が
得られます

Newton-Raphson法

$$\underbrace{\mathbf{q}(^{t+\Delta t}\mathbf{u})}_{\text{Internal force}} = \underbrace{^{t+\Delta t}\mathbf{f}}_{\text{External force}}$$

$$\underbrace{^{t+\Delta t}\mathbf{u}}_{\text{Solution}} = \underbrace{^t\mathbf{u}}_{\text{Initial value}} + \underbrace{\Delta\mathbf{u}}_{\text{Increment}}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{q}(^t\mathbf{u}) + \sum_j \left. \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u_j} \right|_{\mathbf{u}=^t\mathbf{u}} \Delta u_j + \dots \\ & = \mathbf{q}(^t\mathbf{u}) + \mathbf{K}(^t\mathbf{u}) \Delta\mathbf{u} + \dots \end{aligned}$$

Tangent stiffness matrix

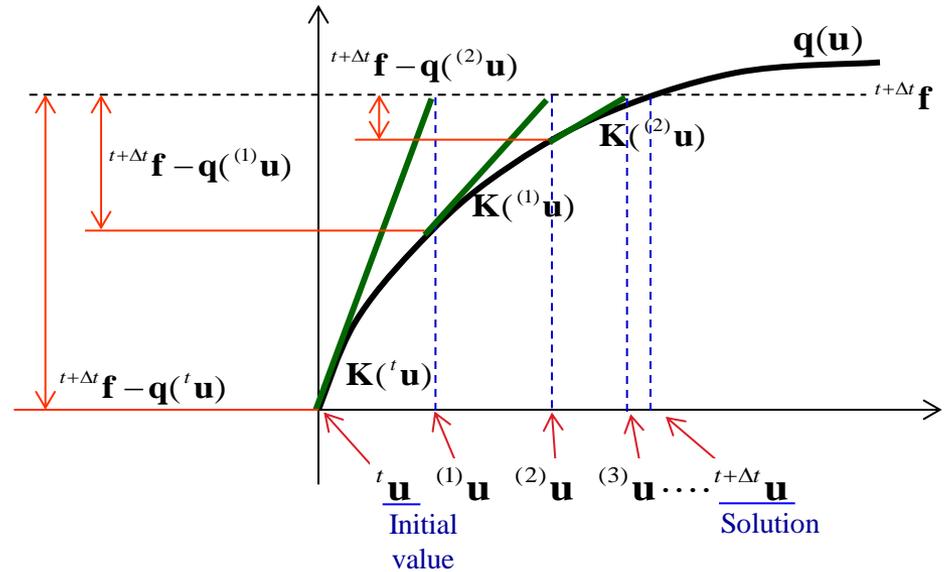


Fig. Schematic drawing of Newton-Raphson method

$m = 1$

$$\mathbf{r}(^t\mathbf{u}) = ^{t+\Delta t}\mathbf{f} - \mathbf{q}(^t\mathbf{u})$$

$$\mathbf{K}(^t\mathbf{u}) \Delta\mathbf{u} = \mathbf{r}(^t\mathbf{u})$$

$$^{(1)}\mathbf{u} = ^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}$$

$m > 1$

$$\mathbf{r}(^{(m-1)}\mathbf{u}) = ^{t+\Delta t}\mathbf{f} - \mathbf{q}(^{(m-1)}\mathbf{u})$$

$$\mathbf{K}(^{(m-1)}\mathbf{u}) \Delta\mathbf{u} = \mathbf{r}(^{(m-1)}\mathbf{u})$$

$$^{(m)}\mathbf{u} = ^{(m-1)}\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}$$

$$\frac{^{(m)}\Delta\mathbf{u}^T \ ^{(m)}\Delta\mathbf{u}}{^{(1)}\Delta\mathbf{u}^T \ ^{(1)}\Delta\mathbf{u}} < \epsilon_d$$

$$\frac{\mathbf{r}^T(^{(m-1)}\mathbf{u}) \ \mathbf{r}(^{(m-1)}\mathbf{u})}{\mathbf{r}^T(^n\mathbf{u}) \ \mathbf{r}(^n\mathbf{u})} < \epsilon_r$$

$$\frac{^{(m)}\Delta\mathbf{u}^T \ \mathbf{r}(^{(m-1)}\mathbf{u})}{^{(1)}\Delta\mathbf{u}^T \ \mathbf{r}(^n\mathbf{u})} < \epsilon_{dr}$$

Convergence

$$^{(m)}\mathbf{u} = ^{t+\Delta t}\mathbf{u}$$

No

変形前を基準配置とした仮想仕事の原理における接線剛性マトリックス

[V1] 以下を満たすような変位 ${}^t\mathbf{u} \in V$ を求めよ

$$V = \{ {}^t\mathbf{w} \mid {}^t\mathbf{w} \in H^1({}^0\Omega)^N, {}^t\mathbf{w} = \underline{\mathbf{u}} \text{ on } {}^0\Gamma_d \}$$

$$M = \{ \delta {}^t\mathbf{u} \mid \delta {}^t\mathbf{u} \in H^1({}^0\Omega)^N, \delta {}^t\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ on } {}^0\Gamma_d \}$$

(仮想仕事の原理)

$$\int_{{}^0\Omega} {}^t\mathbf{S} : \delta {}^t\mathbf{E} \, d{}^0\Omega = \int_{{}^0\Gamma_t} {}^t\underline{\mathbf{t}} \cdot \delta {}^t\mathbf{u} \, d{}^0\Gamma + \int_{{}^0\Omega} {}^0\rho \mathbf{b} \cdot \delta {}^t\mathbf{u} \, d{}^0\Omega \quad \forall \delta {}^t\mathbf{u} \in M$$

内力部分

外力部分

... (3a)
Total Lagrange法で使用される式

仮想仕事の原理における左辺 (内力部分) を物質時間微分します

$$\left(\int_{{}^0\Omega} {}^t\mathbf{S} : \delta {}^t\mathbf{E} \, d{}^0\Omega \right)^\square = \int_{{}^0\Omega} \underline{{}^t\dot{\mathbf{S}}} : \delta {}^t\mathbf{E} \, d{}^0\Omega + \int_{{}^0\Omega} \underline{{}^t\mathbf{S}} : \{ (\delta {}^t\mathbf{F})^T \cdot {}^t\dot{\mathbf{F}} \} \, d{}^0\Omega$$

速度形

構成方程式が
必要となります

... (11)

Total Lagrange法で使用される
接線剛性マトリックス

変形前を基準配置とした仮想仕事の原理における接線剛性マトリックス

式 (11) を得るためには、以下の式変形を利用します

$$\begin{aligned} \text{式 (3a) の左辺より} & \left(\int_{\Omega} {}_0^t \mathbf{S} : \delta {}_0^t \mathbf{E} \, d\Omega \right)^\square \\ &= \int_{\Omega} {}_0^t \dot{\mathbf{S}} : \delta {}_0^t \mathbf{E} \, d\Omega + \int_{\Omega} {}_0^t \mathbf{S} : (\delta {}_0^t \mathbf{E})^\square \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} {}_0^t \dot{\mathbf{S}} : \delta {}_0^t \mathbf{E} \, d\Omega + \int_{\Omega} {}_0^t \mathbf{S} : \left\{ \frac{1}{2} \delta ({}_0^t \mathbf{F}^\top \cdot {}_0^t \mathbf{F} - \mathbf{I}) \right\}^\square \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} {}_0^t \dot{\mathbf{S}} : \delta {}_0^t \mathbf{E} \, d\Omega + \int_{\Omega} {}_0^t \mathbf{S} : \frac{1}{2} \left\{ (\delta {}_0^t \mathbf{F})^\top \cdot {}_0^t \mathbf{F} + {}_0^t \mathbf{F}^\top \cdot \delta {}_0^t \mathbf{F} \right\}^\square \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} {}_0^t \dot{\mathbf{S}} : \delta {}_0^t \mathbf{E} \, d\Omega + \int_{\Omega} {}_0^t \mathbf{S} : \frac{1}{2} \left\{ (\delta {}_0^t \mathbf{F})^\top \cdot {}_0^t \dot{\mathbf{F}} + {}_0^t \dot{\mathbf{F}}^\top \cdot \delta {}_0^t \mathbf{F} \right\} \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} {}_0^t \dot{\mathbf{S}} : \delta {}_0^t \mathbf{E} \, d\Omega + \int_{\Omega} {}_0^t \mathbf{S} : \frac{1}{2} \left[(\delta {}_0^t \mathbf{F})^\top \cdot {}_0^t \dot{\mathbf{F}} + \left\{ (\delta {}_0^t \mathbf{F})^\top \cdot {}_0^t \dot{\mathbf{F}} \right\}^\top \right] \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} {}_0^t \dot{\mathbf{S}} : \delta {}_0^t \mathbf{E} \, d\Omega + \int_{\Omega} {}_0^t \mathbf{S} : \left\{ (\delta {}_0^t \mathbf{F})^\top \cdot {}_0^t \dot{\mathbf{F}} \right\} \, d\Omega \end{aligned}$$

式 (11) が得られます

Total Lagrange法で使用される線形弾性体の構成方程式

第2Piola-Kirchhoff応力テンソルとGreen-Lagrangeひずみテンソルが線形関係である (St.Venant-Kirchhoff体)

$$\underline{{}^t_0\mathbf{S}} = \mathbf{C} : {}^t_0\mathbf{E} \quad \longrightarrow \quad {}^t_0\mathbf{S} = \lambda (\text{tr} {}^t_0\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2 \mu {}^t_0\mathbf{E} \quad \dots \quad (12a)$$

$$\underline{{}^t_0\dot{\mathbf{S}}} = \mathbf{C} : {}^t_0\dot{\mathbf{E}} \quad \dots \quad (12b)$$

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad \dots \quad (12c)$$

$$\begin{aligned} {}^t_0\mathbf{E} &= \frac{1}{2} ({}^t_0\mathbf{F}^T \cdot {}^t_0\mathbf{F} - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2} \{ ({}^0\nabla \otimes {}^t\mathbf{u}) + ({}^0\nabla \otimes {}^t\mathbf{u})^T + ({}^0\nabla \otimes {}^t\mathbf{u}) \cdot ({}^0\nabla \otimes {}^t\mathbf{u})^T \} \quad \dots \quad (12d) \end{aligned}$$

どの応力 (速度) とどのひずみ (速度) が線形の関係にあるかを認識しておくことが重要

現配置の仮想仕事の原理における接線剛性マトリックス

[V2] 以下を満たすような変位 ${}^t\mathbf{u} \in V$ を求めよ

$$V = \{ {}^t\mathbf{w} \mid {}^t\mathbf{w} \in H^1({}^t\Omega)^N, {}^t\mathbf{w} = \underline{\mathbf{u}} \text{ on } {}^t\Gamma_d \}$$

$$M = \{ \delta {}^t\mathbf{u} \mid \delta {}^t\mathbf{u} \in H^1({}^t\Omega)^N, \delta {}^t\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ on } {}^t\Gamma_d \}$$

(仮想仕事の原理)

$$\int_{{}^t\Omega} \underline{\mathbf{T}} : \delta {}^t\mathbf{A}_{(L)} d {}^t\Omega = \int_{{}^t\Gamma_t} \underline{\mathbf{t}} \cdot \delta {}^t\mathbf{u} d {}^t\Gamma + \int_{{}^t\Omega} {}^t\rho \mathbf{b} \cdot \delta {}^t\mathbf{u} d {}^t\Omega \quad \forall \delta {}^t\mathbf{u} \in M$$

内力部分

外力部分

... (4a)

Updated Lagrange法で使用される式

仮想仕事の原理における左辺 (内力部分) を物質時間微分します

$$\left(\int_{{}^t\Omega} \underline{\mathbf{T}} : \delta {}^t\mathbf{A}_{(L)} d {}^t\Omega \right)^\square = \int_{{}^t\Omega} \underline{\dot{\mathbf{S}}} : \delta {}^t\mathbf{A}_{(L)} d {}^t\Omega + \int_{{}^t\Omega} \underline{\mathbf{T}} : \{ (\delta {}^t\mathbf{F})^\top \cdot {}^t\mathbf{L}^\top \} d {}^t\Omega$$

速度形

Truesdellの応力速度テンソル
構成方程式が必要となります

... (13a)

Updated Lagrange法で
使用される
接線剛性マトリックス

$$\delta {}^t\mathbf{F} = ({}^t\nabla \otimes \delta {}^t\mathbf{u})^\top \quad \dots (13b)$$

$${}^t\mathbf{L} = {}^t\nabla \otimes {}^t\dot{\mathbf{u}} \quad \dots (13c)$$

現配置の仮想仕事の原理における接線剛性マトリックス

式 (13a) を得るためには、以下の式変形を利用します

$${}^t\mathbf{T} = \frac{1}{\det {}^t\mathbf{F}} {}^t\mathbf{F} \cdot {}^t\mathbf{S} \cdot {}^t\mathbf{F}^T \quad \dots (14)$$

Cauchy応力テンソルと
第2Piola-Kirchhoff応力テンソルの関係式

$$\begin{aligned} \text{式 (14) より } {}^t\dot{\mathbf{S}} &= \left\{ (\det {}^t\mathbf{F}) {}^t\mathbf{F}^{-1} \cdot {}^t\mathbf{T} \cdot {}^t\mathbf{F}^{-T} \right\}^\square \\ &= (\det {}^t\mathbf{F})^\square {}^t\mathbf{F}^{-1} \cdot {}^t\mathbf{T} \cdot {}^t\mathbf{F}^{-T} \\ &\quad + (\det {}^t\mathbf{F}) ({}^t\mathbf{F}^{-1})^\square \cdot {}^t\mathbf{T} \cdot {}^t\mathbf{F}^{-T} \\ &\quad + (\det {}^t\mathbf{F}) {}^t\mathbf{F}^{-1} \cdot {}^t\dot{\mathbf{T}} \cdot {}^t\mathbf{F}^{-T} \\ &\quad + (\det {}^t\mathbf{F}) {}^t\mathbf{F}^{-1} \cdot {}^t\mathbf{T} \cdot ({}^t\mathbf{F}^{-T})^\square \quad \dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{式 (15) より } &\frac{1}{\det {}^t\mathbf{F}} {}^t\mathbf{F} \cdot {}^t\dot{\mathbf{S}} \cdot {}^t\mathbf{F}^T \\ &= \frac{(\det {}^t\mathbf{F})^\square}{\det {}^t\mathbf{F}} {}^t\mathbf{T} + {}^t\mathbf{F} \cdot ({}^t\mathbf{F}^{-1})^\square \cdot {}^t\mathbf{T} + {}^t\dot{\mathbf{T}} + {}^t\mathbf{T} \cdot ({}^t\mathbf{F}^{-T})^\square \cdot {}^t\mathbf{F}^T \\ &= (\text{tr } {}^t\mathbf{L}) {}^t\mathbf{T} - {}^t\mathbf{L}^T \cdot {}^t\mathbf{T} + {}^t\dot{\mathbf{T}} - {}^t\mathbf{T} \cdot {}^t\mathbf{L} \\ &= {}^t\dot{\mathbf{T}} - {}^t\mathbf{L}^T \cdot {}^t\mathbf{T} - {}^t\mathbf{T} \cdot {}^t\mathbf{L} + (\text{tr } {}^t\mathbf{L}) {}^t\mathbf{T} \\ &= \overset{\circ}{\mathbf{T}}_{(0)} + (\text{tr } {}^t\mathbf{L}) {}^t\mathbf{T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{\mathbf{T}}_{(0)} \quad \text{Oldroyd速度: 物質点と共に変形するように} \\ &= \hat{\mathbf{T}}_{(0)} \quad \text{物体に埋め込まれた観測者から見た速度} \\ &= {}^t\dot{\mathbf{S}} \quad \dots (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^t\dot{\mathbf{F}} &= ({}^0\nabla \otimes {}^t\dot{\mathbf{u}})^T \\ &= ({}^t\nabla \otimes {}^t\dot{\mathbf{u}})^T \cdot ({}^0\nabla \otimes {}^t\mathbf{x})^T \\ &= \mathbf{L}^T \cdot {}^t\mathbf{F} \quad \dots (16) \\ \mathbf{L}^T &= {}^t\dot{\mathbf{F}} \cdot {}^t\mathbf{F}^{-1} \quad \dots (17a) \\ \mathbf{L}^T &= -{}^t\mathbf{F} \cdot ({}^t\mathbf{F}^{-1})^\square \quad \dots (17b) \end{aligned}$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = (\det {}^t\mathbf{F}) {}^t\mathbf{T} \quad \dots (18)$$

相対Kirchhoff応力テンソル

現配置の仮想仕事の原理における接線剛性マトリックス

式 (13a) を得るためには、さらに以下の式変形を利用します

$$\begin{aligned}
 \text{式 (4a) の左辺より} \quad & \left(\int_{t\Omega} {}^t\mathbf{T} : \delta {}^t\mathbf{A}_{(L)} d {}^t\Omega \right)^\square \\
 & = \left(\int_{0\Omega} {}^t\mathbf{S} : \delta {}^t\mathbf{E} d {}^0\Omega \right)^\square \\
 & = \int_{0\Omega} {}^t\dot{\mathbf{S}} : \delta {}^t\mathbf{E} d {}^0\Omega + \int_{0\Omega} {}^t\mathbf{S} : \left\{ (\delta {}^t\mathbf{F})^\top \cdot {}^t\dot{\mathbf{F}} \right\} d {}^0\Omega
 \end{aligned}$$

式 (8) と式 (19) を利用します

$$\begin{aligned}
 & \int_{0\Omega} \left\{ (\det {}^t\mathbf{F}) {}^t\mathbf{F}^{-1} \cdot {}^t\dot{\mathbf{S}} \cdot {}^t\mathbf{F}^{-\top} \right\} : ({}^t\mathbf{F}^\top \cdot \delta {}^t\mathbf{A}_{(L)} \cdot {}^t\mathbf{F}) d {}^0\Omega \\
 & = \int_{t\Omega} \left\{ (\det {}^t\mathbf{F}) {}^t\mathbf{F}^{-1} \cdot {}^t\dot{\mathbf{S}} \cdot {}^t\mathbf{F}^{-\top} \right\} : ({}^t\mathbf{F}^\top \cdot \delta {}^t\mathbf{A}_{(L)} \cdot {}^t\mathbf{F}) \frac{1}{\det {}^t\mathbf{F}} d {}^t\Omega \\
 & = \int_{t\Omega} ({}^t\mathbf{F}^{-1} \cdot {}^t\dot{\mathbf{S}} \cdot {}^t\mathbf{F}^{-\top}) : ({}^t\mathbf{F}^\top \cdot \delta {}^t\mathbf{A}_{(L)} \cdot {}^t\mathbf{F}) d {}^t\Omega \\
 & = \int_{t\Omega} \left\{ ({}^t\mathbf{F}^{-1})_{im} \cdot {}^t\dot{S}_{mn} \cdot ({}^t\mathbf{F}^{-1})_{jn} \right\} : \left\{ ({}^t\mathbf{F}^\top)_{ki} (\delta {}^t\mathbf{A}_{(L)})_{kl} ({}^t\mathbf{F})_{lj} \right\} d {}^t\Omega \\
 & = \int_{t\Omega} \delta_{km} \delta_{ln} \cdot {}^t\dot{S}_{mn} \cdot (\delta {}^t\mathbf{A}_{(L)})_{kl} d {}^t\Omega \\
 & = \int_{t\Omega} {}^t\dot{S}_{kl} (\delta {}^t\mathbf{A}_{(L)})_{kl} d {}^t\Omega \\
 & = \int_{t\Omega} {}^t\dot{\mathbf{S}} : \delta {}^t\mathbf{A}_{(L)} d {}^t\Omega \quad \dots \quad (20)
 \end{aligned}$$

式 (20) と式(21) を使用して、
式 (13a) が得られます

式 (14) を利用します

$$\begin{aligned}
 & \int_{0\Omega} \left\{ (\det {}^t\mathbf{F}) {}^t\mathbf{F}^{-1} \cdot {}^t\mathbf{T} \cdot {}^t\mathbf{F}^{-\top} \right\} : \left\{ (\delta {}^t\mathbf{F} \cdot {}^t\mathbf{F})^\top \cdot ({}^t\mathbf{L}^\top \cdot {}^t\mathbf{F}) \right\} \frac{1}{(\det {}^t\mathbf{F})} d {}^0\Omega \\
 & = \int_{0\Omega} \left\{ {}^t\mathbf{F}^{-1} \cdot {}^t\mathbf{T} \cdot {}^t\mathbf{F}^{-\top} \right\} : \left\{ (\delta {}^t\mathbf{F} \cdot {}^t\mathbf{F})^\top \cdot ({}^t\mathbf{L}^\top \cdot {}^t\mathbf{F}) \right\} d {}^0\Omega \\
 & = \int_{0\Omega} \left\{ ({}^t\mathbf{F}^{-1})_{im} \cdot {}^tT_{mn} \cdot ({}^t\mathbf{F}^{-1})_{jn} \right\} \left\{ (\delta {}^tF_{kl} \cdot {}^tF_{li}) ({}^tL_{rk} \cdot {}^tF_{rj}) \right\} d {}^0\Omega \\
 & = \int_{0\Omega} \delta_{lm} \delta_{rn} \cdot {}^tT_{mn} \cdot \delta {}^tF_{kl} \cdot {}^tL_{rk} d {}^0\Omega \\
 & = \int_{0\Omega} {}^tT_{lr} \delta {}^tF_{kl} \cdot {}^tL_{rk} d {}^0\Omega \\
 & = \int_{t\Omega} {}^t\mathbf{T} : \left\{ (\delta {}^t\mathbf{F})^\top \cdot {}^t\mathbf{L}^\top \right\} d {}^t\Omega \quad \dots \quad (21)
 \end{aligned}$$

Updated Lagrange法で使用される線形弾性体の構成方程式

相対Kirchhoff応力テンソルのJaumann速度と変形速度テンソルが
線形関係である

(有限変形弾塑性解析で使用される構成方程式)

$$\underline{{}^t\hat{\mathbf{T}}}_{(J)} = \mathbf{C} : {}^t\mathbf{D} \quad \dots \quad (22a)$$

相対Kirchhoff応力テンソルのJaumann速度

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad \dots \quad (22b)$$

$$\underline{{}^t\mathbf{D}} = \frac{1}{2} \{ {}^t\nabla \otimes {}^t\dot{\mathbf{u}} + ({}^t\nabla \otimes {}^t\dot{\mathbf{u}})^T \} \quad \dots \quad (22c)$$

変形速度テンソル

$$\begin{aligned} \underline{{}^t\dot{\mathbf{S}}} &= \underline{{}^t\hat{\mathbf{T}}}_{(J)} - {}^t\mathbf{D} \cdot {}^t\mathbf{T} - {}^t\mathbf{T} \cdot {}^t\mathbf{D} \\ &= \mathbf{C} : {}^t\mathbf{D} - {}^t\mathbf{D} \cdot {}^t\mathbf{T} - {}^t\mathbf{T} \cdot {}^t\mathbf{D} \\ &\quad \dots \quad (23a) \end{aligned}$$

Truesdellの
応力速度テンソル

$$\begin{aligned} {}^t\dot{S}_{ij} &= C_{ijkl} {}^tD_{kl} - {}^tD_{ik} {}^tT_{kj} - {}^tT_{ik} {}^tD_{kj} \\ &= C_{ijkl} {}^tD_{kl} - \delta_{il} {}^tD_{lk} {}^tT_{jk} - \delta_{jl} {}^tT_{ik} {}^tD_{kl} \\ &= (C_{ijkl} - \delta_{il} {}^tT_{jk} - {}^tT_{ik} \delta_{jl}) {}^tD_{kl} \\ &= \left\{ C_{ijkl} - \frac{1}{2} (\delta_{il} {}^tT_{jk} + \delta_{ik} {}^tT_{jl}) - \frac{1}{2} ({}^tT_{ik} \delta_{jl} + {}^tT_{il} \delta_{jk}) \right\} {}^tD_{kl} \\ &\quad \dots \quad (23b) \end{aligned}$$

以下の式が得られます

$$\underline{{}^t\dot{\mathbf{S}}} = \underline{{}^t\tilde{\mathbf{C}}} : {}^t\mathbf{D} \quad \dots \quad (24a)$$

$$\tilde{C}_{ijkl} = C_{ijkl} - \frac{1}{2} (\delta_{il} {}^tT_{jk} + \delta_{ik} {}^tT_{jl}) - \frac{1}{2} ({}^tT_{ik} \delta_{jl} + {}^tT_{il} \delta_{jk}) \quad \dots \quad (24b)$$

応力の時間積分

$$\begin{aligned}
 \underline{{}^{t+\Delta t}\mathbf{T}} &= {}^t\mathbf{T} + \int_t^{t+\Delta t} {}^\tau\dot{\mathbf{T}} d\tau \\
 &= {}^t\mathbf{T} + \int_t^{t+\Delta t} ({}^\tau\dot{\mathbf{T}}_{(J)} - {}^\tau\mathbf{W} \cdot {}^\tau\mathbf{T} - {}^\tau\mathbf{T} \cdot {}^\tau\mathbf{W}^T) d\tau \\
 &= {}^t\mathbf{T} + \int_t^{t+\Delta t} (\mathbf{C} : {}^\tau\mathbf{D} - {}^\tau\mathbf{W} \cdot {}^\tau\mathbf{T} - {}^\tau\mathbf{T} \cdot {}^\tau\mathbf{W}^T - {}^\tau\mathbf{T} \operatorname{tr} {}^\tau\mathbf{D}) d\tau
 \end{aligned}$$

... (25a)

$${}^t\mathbf{W} = \frac{1}{2}({}^t\mathbf{L} - {}^t\mathbf{L}^T)$$

... (25b)

後退Euler積分ならば

$$\underline{{}^{t+\Delta t}\mathbf{T}} \square {}^t\mathbf{T} + (\mathbf{C} : {}^{t+\Delta t}\mathbf{D} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{W} \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{T} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{T} \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{W}^T - {}^{t+\Delta t}\mathbf{T} \operatorname{tr} {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}) \Delta t$$

... (26)

現バージョンのFrontISTRの応力更新には、式 (21) が使用されています

増分間のスピンの一定であると仮定した場合の応力の時間積分法

時刻 t から物質点の剛体回転と同量だけ回転する観測者から見た応力テンソル

$${}^{\tau}\mathbf{T}^* = {}^{\tau}\mathbf{R}^T \cdot {}^{\tau}\mathbf{T} \cdot {}^{\tau}\mathbf{R} \quad \dots (27)$$

$$\begin{aligned} {}^{\tau}\dot{\mathbf{T}}^* &= {}^{\tau}\dot{\mathbf{R}}^T \cdot {}^{\tau}\mathbf{T} \cdot {}^{\tau}\mathbf{R} + {}^{\tau}\mathbf{R}^T \cdot {}^{\tau}\dot{\mathbf{T}} \cdot {}^{\tau}\mathbf{R} + {}^{\tau}\mathbf{R}^T \cdot {}^{\tau}\mathbf{T} \cdot {}^{\tau}\dot{\mathbf{R}} \\ &= {}^{\tau}\mathbf{R}^T \cdot {}^{\tau}\mathbf{R} \cdot {}^{\tau}\dot{\mathbf{R}}^T \cdot {}^{\tau}\mathbf{T} \cdot {}^{\tau}\mathbf{R} + {}^{\tau}\mathbf{R}^T \cdot {}^{\tau}\dot{\mathbf{T}} \cdot {}^{\tau}\mathbf{R} + {}^{\tau}\mathbf{R}^T \cdot {}^{\tau}\mathbf{T} \cdot {}^{\tau}\dot{\mathbf{R}} \cdot {}^{\tau}\mathbf{R}^T \cdot {}^{\tau}\mathbf{R} \\ &= {}^{\tau}\mathbf{R}^T \cdot ({}^{\tau}\mathbf{R} \cdot {}^{\tau}\dot{\mathbf{R}}^T \cdot {}^{\tau}\mathbf{T} + {}^{\tau}\dot{\mathbf{T}} + {}^{\tau}\mathbf{T} \cdot {}^{\tau}\dot{\mathbf{R}} \cdot {}^{\tau}\mathbf{R}^T) \cdot {}^{\tau}\mathbf{R} \\ &= {}^{\tau}\mathbf{R}^T \cdot ({}^{\tau}\dot{\mathbf{\Omega}} \cdot {}^{\tau}\mathbf{T} + {}^{\tau}\dot{\mathbf{T}} - {}^{\tau}\mathbf{T} \cdot {}^{\tau}\dot{\mathbf{\Omega}}) \cdot {}^{\tau}\mathbf{R} \\ \square & {}^{\tau}\mathbf{R}^T \cdot ({}^{\tau}\mathbf{W} \cdot {}^{\tau}\mathbf{T} + {}^{\tau}\dot{\mathbf{T}} - {}^{\tau}\mathbf{T} \cdot {}^{\tau}\mathbf{W}) \cdot {}^{\tau}\mathbf{R} \quad \left. \begin{array}{l} \text{増分間では, 剛体スピンとスピンは同じと近似} \\ \end{array} \right\} \\ &= {}^{\tau}\mathbf{R}^T \cdot \overset{\circ}{\mathbf{T}}_{(J)} \cdot {}^{\tau}\mathbf{R} \quad \dots (28) \end{aligned}$$

後退Euler積分ならば

$$\begin{aligned} \underline{{}^{t+\Delta t}\mathbf{T}^*} &= {}^t\mathbf{T}^* + \int_t^{t+\Delta t} {}^{\tau}\dot{\mathbf{T}}^* d\tau \\ &= {}^t\mathbf{T} + \int_t^{t+\Delta t} {}^{\tau}\mathbf{R}^T \cdot \overset{\circ}{\mathbf{T}}_{(J)} \cdot {}^{\tau}\mathbf{R} d\tau \\ &= {}^t\mathbf{T} + \int_t^{t+\Delta t} {}^{\tau}\mathbf{R}^T \cdot (\mathbf{C} : {}^{\tau}\mathbf{D} - {}^{\tau}\mathbf{T} \operatorname{tr} {}^{\tau}\mathbf{D}) \cdot {}^{\tau}\mathbf{R} d\tau \\ \square & {}^t\mathbf{T} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^T \cdot (\mathbf{C} : {}^{t+\Delta t}\mathbf{D} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{T} \operatorname{tr} {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}) \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} \Delta t \quad \dots (29) \end{aligned}$$

$$\underline{{}^{t+\Delta t}\mathbf{T}} \square {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} \cdot {}^t\mathbf{T} \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^T + (\mathbf{C} : {}^{t+\Delta t}\mathbf{D} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{T} \operatorname{tr} {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}) \Delta t \quad \dots (30)$$

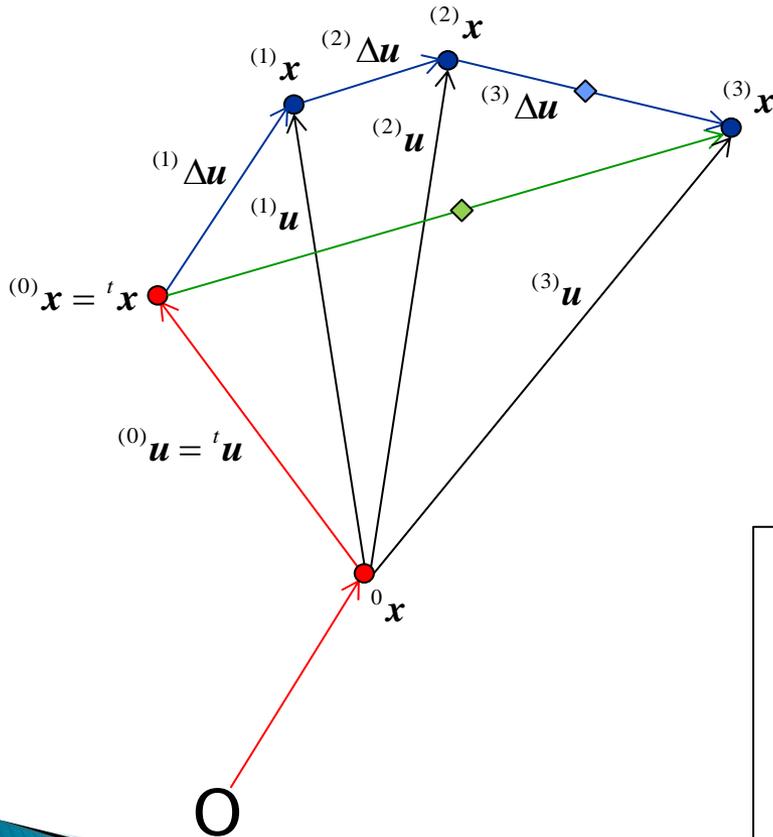
応力の積分経路

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{T} = {}^t\mathbf{T} + \int_t^{t+\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{T}} d\tau$$

Newton-Raphson法

$${}^{(3)}\Delta u \longrightarrow {}^{(3)}\mathbf{T}$$

既知



$${}^{(3)}\mathbf{T} = {}^{(2)}\mathbf{T} + \blacklozenge \dot{\mathbf{T}} \Delta t$$

収束点を利用していない

$${}^{(3)}\mathbf{T} = {}^t\mathbf{T} + \blacklozenge \dot{\mathbf{T}} \Delta t$$

収束点を利用する

$${}^{(3)}\mathbf{T} = {}^{t+\Delta t}_t \mathbf{R}(\blacklozenge \mathbf{W})^T \cdot {}^{(2)}\mathbf{T} \cdot {}^{t+\Delta t}_t \mathbf{R}(\blacklozenge \mathbf{W}) + \blacklozenge \dot{\mathbf{T}}_{(J)} \Delta t$$

収束点を利用していない

$${}^{(3)}\mathbf{T} = {}^{t+\Delta t}_t \mathbf{R}(\blacklozenge \mathbf{W})^T \cdot {}^t\mathbf{T} \cdot {}^{t+\Delta t}_t \mathbf{R}(\blacklozenge \mathbf{W}) + \blacklozenge \dot{\mathbf{T}}_{(J)} \Delta t$$

収束点を利用する

現バージョンのFrontISTRの応力更新には、収束点を利用しています

2. 解析事例の紹介

今後の予定

- 次回は、有限要素離散化およびFrontISTRソースコードの関連するサブルーチンについて紹介します(今回の定式化の続き・補足も発表します)
- 有限変形弾性解析のフロー(荷重増分ステップ, Newton-Raphson反復, 各グループ内での接線剛性マトリックスの作成, 応力の更新)に対応するサブルーチンを説明します

参考文献

- [1] FrontISTR Ver.3.4 ユーザーマニュアル, 2013.
- [2] FrontISTR Ver.3.4 チュートリアルガイド, 2013.
- [3] 久田俊明, 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎, 1992, 丸善.
- [4] 久田俊明, 野口裕久, 非線形有限要素法の基礎と応用, 1995, 丸善.
- [5] 渡邊浩志, 非線形有限要素法特論, <http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/>.