

# FrontISTRによる 弾塑性解析の理論とプログラムの解説 (時間積分アルゴリズムを中心に)

東京大学  
新領域創成科学研究科  
人間環境学専攻  
橋本 学

2015年11月27日

第23回 FrontISTR研究会

<FrontISTRによる接触解析および弾塑性解析  
(理論、プログラミング、解析事例) の解説>

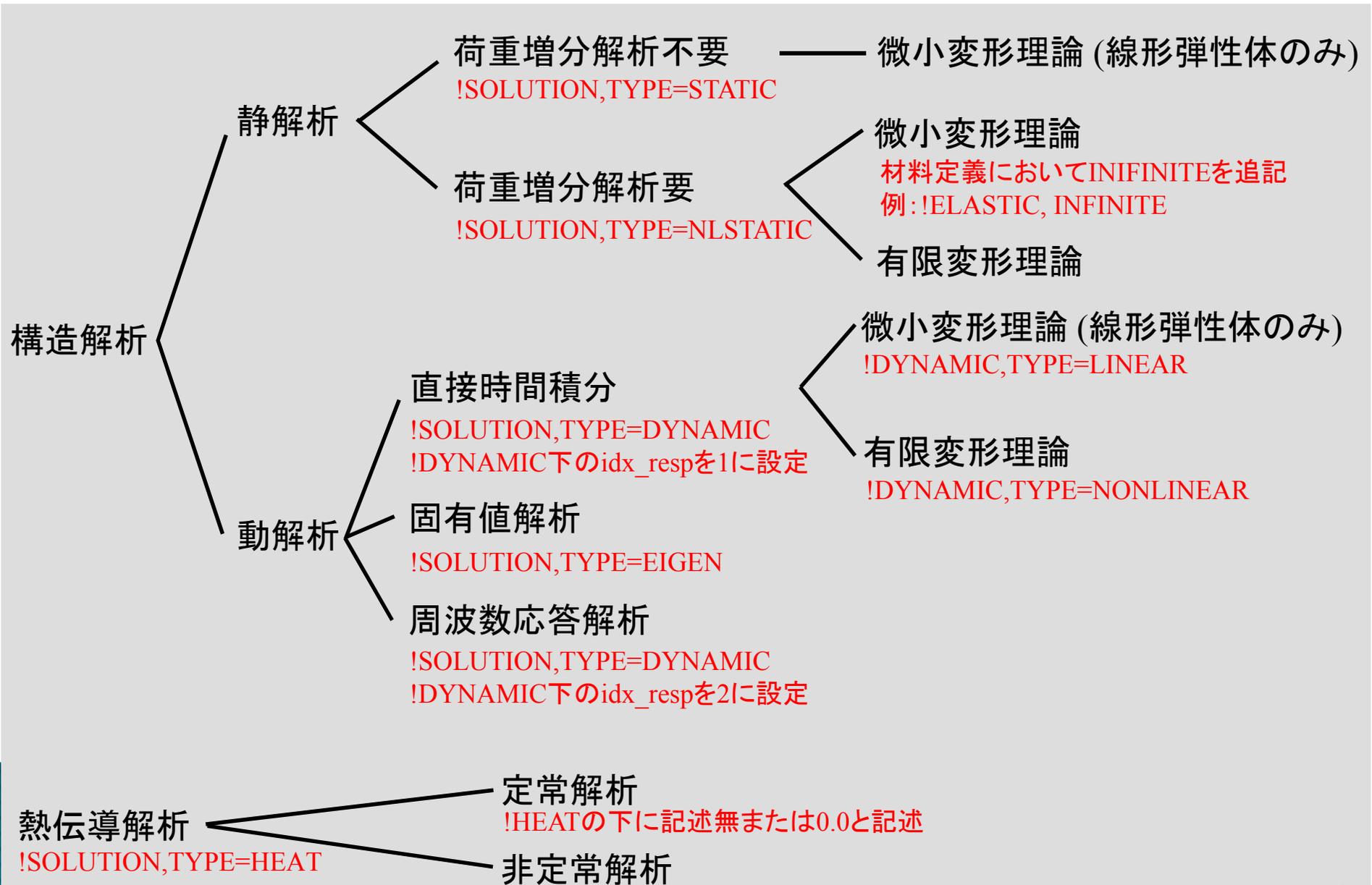
## この講演では

- 『FrontISTRに実装されている定式化を十分に理解し、解きたい問題に対してソースコードを自由にカスタマイズ(要素タイプを追加, 材料の種類を追加, ユーザサブルーチンを追加) できるようになること』を最終目標とします
- 今回は, FrontISTRに実装されている弾塑性解析機能に焦点を当てます
- 第16回FrontISTR研究会(「弾塑性解析」, 2015年1月16日開催)で説明しなかった時間積分アルゴリズムを中心に解説します

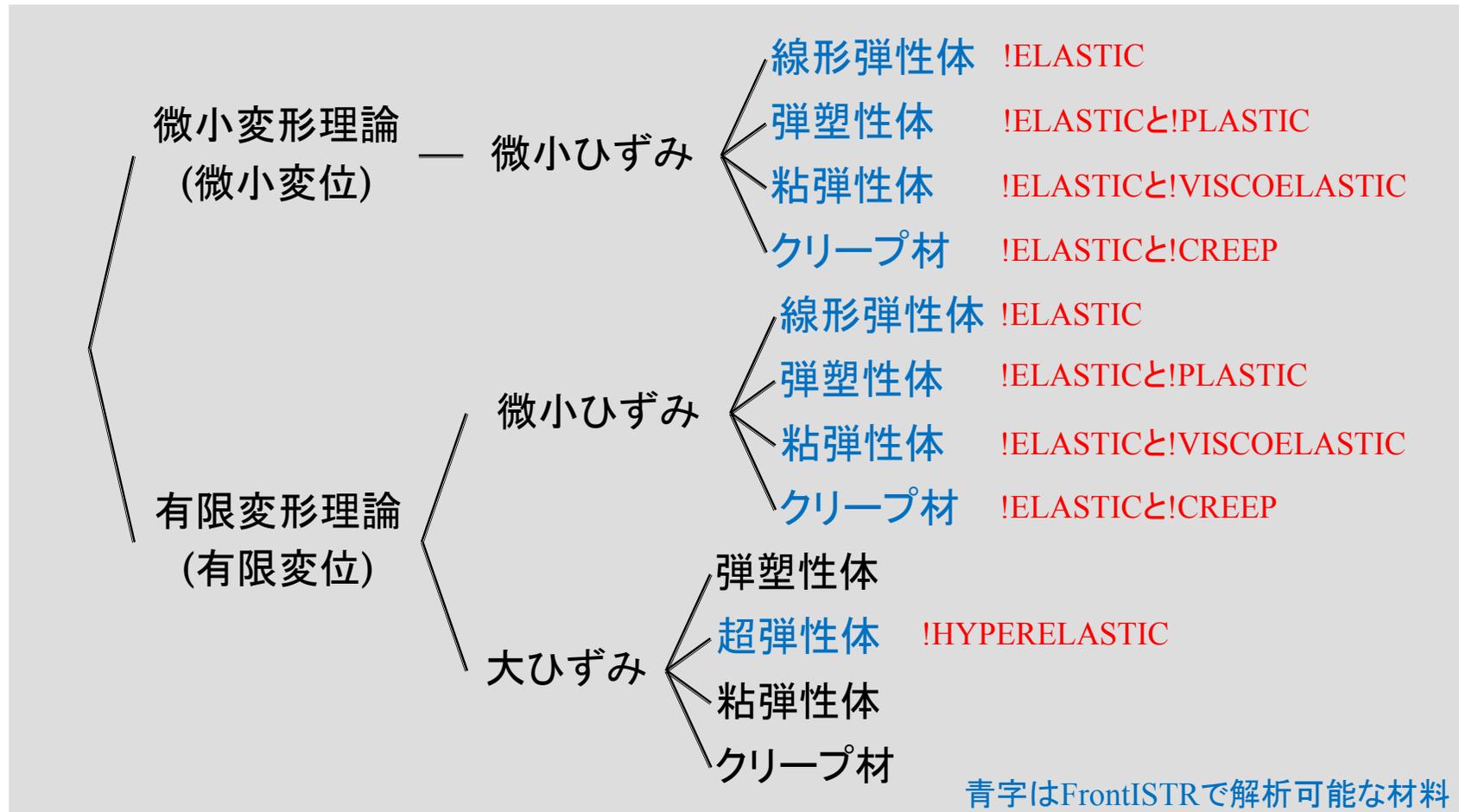
# この講演の内容

- 現バージョンのFrontISTRによる弾塑性解析の時間積分アルゴリズムの理論とプログラムを解説します
  - Return Mappingと連続接線係数
- 次バージョンで修正予定の時間積分アルゴリズムの理論とプログラムを解説します
  - コンシステント接線剛性係数
- 解析事例を紹介します

# 解析の分類 (1/2)



# 解析の分類 (2/2)



## 有限変形理論

$${}^t\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left\{ ({}^0\nabla \otimes {}^t\mathbf{u}) + ({}^0\nabla \otimes {}^t\mathbf{u})^T + ({}^0\nabla \otimes {}^t\mathbf{u}) \cdot ({}^0\nabla \otimes {}^t\mathbf{u})^T \right\}$$

ひずみ

変位こう配の2次項がある

## 大ひずみ

$${}^t\mathbf{S} = f({}^t\mathbf{E}, {}^t\mathbf{E} \cdot {}^t\mathbf{E}, \dots)$$

応力 ひずみの2次以上の項がある

# 記号の説明

$t$	時刻 [s]
$N$	次元 (3次元: $N = 3$ )
$\Omega$	有界領域 [ $m^N$ ]
$\Gamma$	境界 [ $m^{N-1}$ ]
$\mathbf{x}$	物質点の位置ベクトル [m]
$\nabla$	ナブラ [1/m]
$\mathbf{u}$	変位 [m]
$\mathbf{t}$	トラクション [Pa]
$\mathbf{b}$	単位質量当たりの体積力 [N/kg]
$\rho$	密度 [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]
$\mathbf{n}$	外向き単位法線ベクトル [-]

時刻  $t$  の物理量

$${}^t_0 \mathbf{E} = \frac{1}{2} \left\{ ({}^0 \nabla \otimes {}^t \mathbf{u}) + ({}^0 \nabla \otimes {}^t \mathbf{u})^T + ({}^0 \nabla \otimes {}^t \mathbf{u}) \cdot ({}^0 \nabla \otimes {}^t \mathbf{u})^T \right\}$$

基準となる時刻が時刻0の意味

$a, b$	スカラー
$\mathbf{a}, \mathbf{b}$	ベクトル
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	2階のテンソル

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij}$$

# FrontISTRによる弾塑性解析の理論とプログラムの解説 (時間積分アルゴリズムを中心に)

## 目次

1. 現バージョンのFrontISTRによる弾塑性解析の時間積分アルゴリズム
  - ・ 理論
  - ・ 現バージョンのプログラム
2. 次バージョンで修正予定の時間積分アルゴリズム  
(コンシステント接線剛性の導入)
  - ・ 理論
  - ・ 次バージョンで修正予定のプログラム
3. 解析事例

# FrontISTRによる弾塑性解析の理論とプログラムの解説 (時間積分アルゴリズムを中心に)

## 目次

1. **現バージョンのFrontISTRによる弾塑性解析の時間積分アルゴリズム**
  - ・ 理論
  - ・ 現バージョンのプログラム
2. 次バージョンで修正予定の時間積分アルゴリズム  
(コンシステント接線剛性の導入)
  - ・ 理論
  - ・ 次バージョンで修正予定のプログラム
3. 解析事例

# 単軸方向引張試験

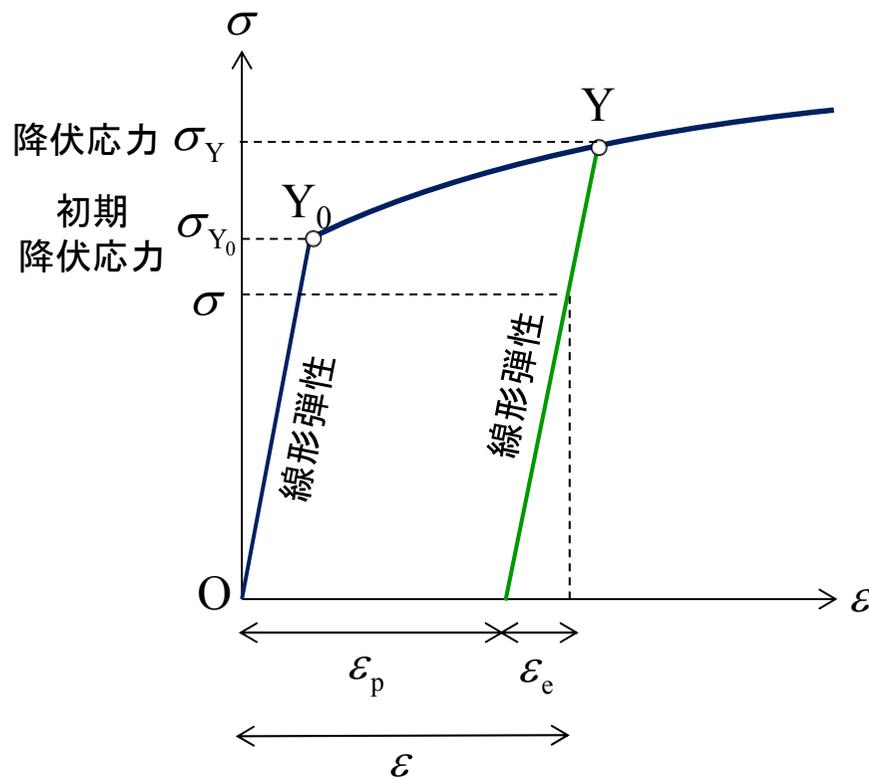


Fig. Uniaxial stress-strain curve

$Y_0$  : 初期降伏点

$Y$  : 後続降伏点

$Y_0 \rightarrow Y$  : 降伏応力の増加 (硬化)

## 仮定

- 比例限度と弾性限度は降伏応力に一致させる ( $Y_0$ 点)
- 後続降伏応力は除荷開始点の応力に一致させる ( $Y$ 点)
- 塑性変形は結晶のすべりによって生じるから、塑性変形によって物体の体積は変化しない

# 微小ひずみを仮定した弾塑性構成則モデル

- 弾塑性ひずみ分解 (加算分解できると仮定)

全ひずみテンソル [-]

$${}^t\boldsymbol{\varepsilon} = \underline{{}^t\boldsymbol{\varepsilon}_e} + \underline{{}^t\boldsymbol{\varepsilon}_p} \quad \dots(1)$$

弾性ひずみテンソル [-] 塑性ひずみ (永久ひずみ) テンソル[-]

- 速度形弾塑性構成則

$$\begin{aligned} {}^t\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{C}_e : {}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \\ &= \underline{{}^t\mathbf{C}_{ep}} : {}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \dots(2) \end{aligned}$$

→ 塑性変形の情報から弾塑性係数を定める

- 降伏関数 (降伏する条件)
- 塑性流れ則 (塑性ひずみの発展)
- 硬化則 (降伏応力の発展)

多軸応力状態の降伏条件を  
単軸応力状態の降伏条件で近似します

# 速度形弾塑性構成則

応力速度 [Pa/s]      弾性ひずみ速度 [1/s]

$$\begin{aligned}
 {}^t\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{C}_e : {}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \\
 &= \mathbf{C}_e : ({}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - {}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \\
 &= \underline{{}^t\mathbf{C}_{ep}} : {}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \dots(3)
 \end{aligned}$$

弾塑性係数 [Pa]

弾性定数 [Pa]

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_e &= (C_e)_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \\
 &= \left\{ \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right\} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad \dots(4)
 \end{aligned}$$

Lamé定数 [Pa]

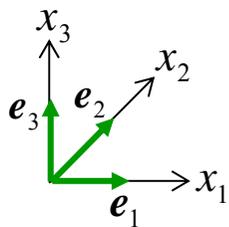


Fig. Cartesian coordinates

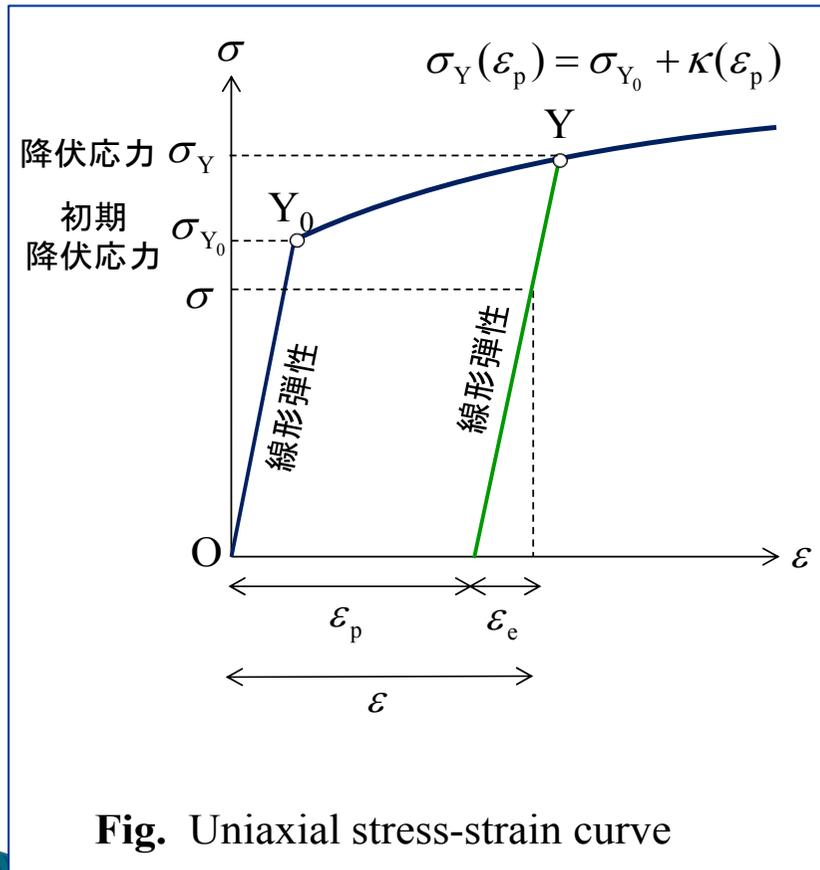
$${}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left\{ {}^t\nabla \otimes {}^t\dot{\mathbf{u}} + ({}^t\nabla \otimes {}^t\dot{\mathbf{u}})^T \right\} \quad \dots(5)$$

全ひずみ速度

# 降伏関数：降伏する条件

$$F({}^t\sigma, {}^t\kappa) \leq 0 \quad \dots(6)$$

## 降伏関数



## 弾性域

$$F({}^t\sigma, {}^t\kappa) < 0 \quad \dots(7.a)$$

$${}^t\dot{\varepsilon}_p = \mathbf{0} \quad \dots(7.b)$$

## 弾性域の境界 (Y点)

$$F({}^t\sigma, {}^t\kappa) = 0 \quad \dots(8.a)$$

$$\begin{cases} {}^t\dot{\varepsilon}_p = \mathbf{0} & \text{(弾性除荷)} \\ {}^t\dot{\varepsilon}_p \neq \mathbf{0} & \text{(塑性負荷)} \end{cases} \quad \dots(8.b)$$

(※) FrontISTRでは、3種類の降伏関数 (von Mises, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager) を使用できます

# 塑性流れ則：塑性ひずみの発展（1/2）

## 塑性流れ則

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\gamma} \boldsymbol{m}$$

流れベクトル[-]

$$= \dot{\gamma} \frac{\partial {}^t\Theta}{\partial {}^t\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{塑性ポテンシャル [-]} \quad \dots(9)$$

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad \dots(10)$$

塑性乗数 [1/s]

$$\dot{\gamma} F({}^t\boldsymbol{\sigma}, {}^t\kappa) = 0 \quad \dots(11)$$

相補性条件

$$\begin{cases} F({}^t\boldsymbol{\sigma}, {}^t\kappa) < 0 \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = 0 \Rightarrow \dot{\gamma} = 0 \\ \dot{\gamma} > 0 \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \neq 0 \Rightarrow F({}^t\boldsymbol{\sigma}, {}^t\kappa) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F({}^t\boldsymbol{\sigma}, {}^t\kappa) \leq 0 \\ \dot{\gamma} \geq 0 \\ \dot{\gamma} F({}^t\boldsymbol{\sigma}, {}^t\kappa) = 0 \end{cases} \quad \dots(12)$$

# 塑性流れ則：塑性ひずみの発展 (2/2)

塑性ポテンシャル ${}^t\Theta$ と  
降伏関数 ${}^tF$ が一致すると仮定  
(関連流れ則)

$${}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = {}^t\dot{\gamma} \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\boldsymbol{\sigma}} \quad \dots(13)$$

$$\begin{aligned} {}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p : d^t\boldsymbol{\sigma}^* &= \left( {}^t\dot{\gamma} \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\boldsymbol{\sigma}} \right) : d^t\boldsymbol{\sigma}^* \\ &= {}^t\dot{\gamma} \left( \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\boldsymbol{\sigma}} : d^t\boldsymbol{\sigma}^* \right) \\ &= \underline{{}^t\dot{\gamma} d^tF^*} = 0 \quad \dots(14) \end{aligned}$$

垂直性の条件

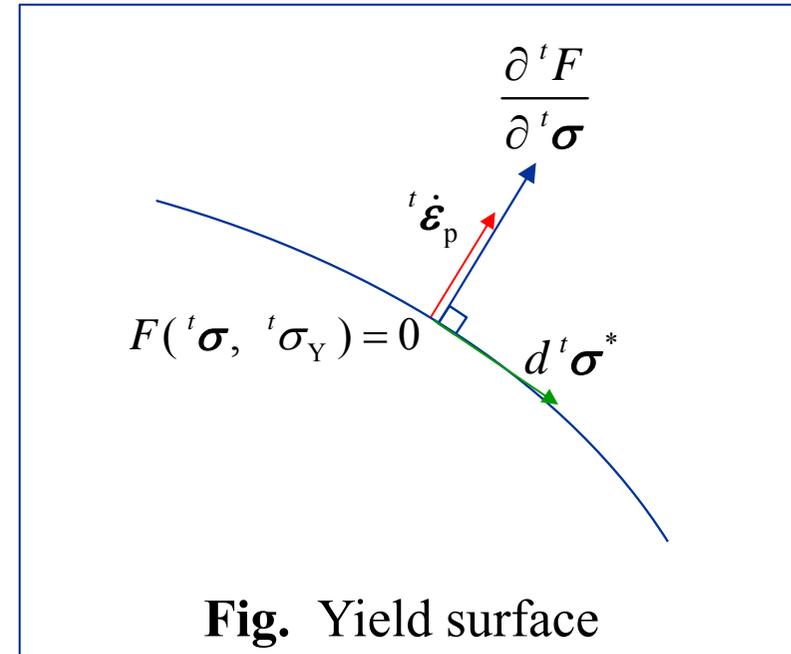
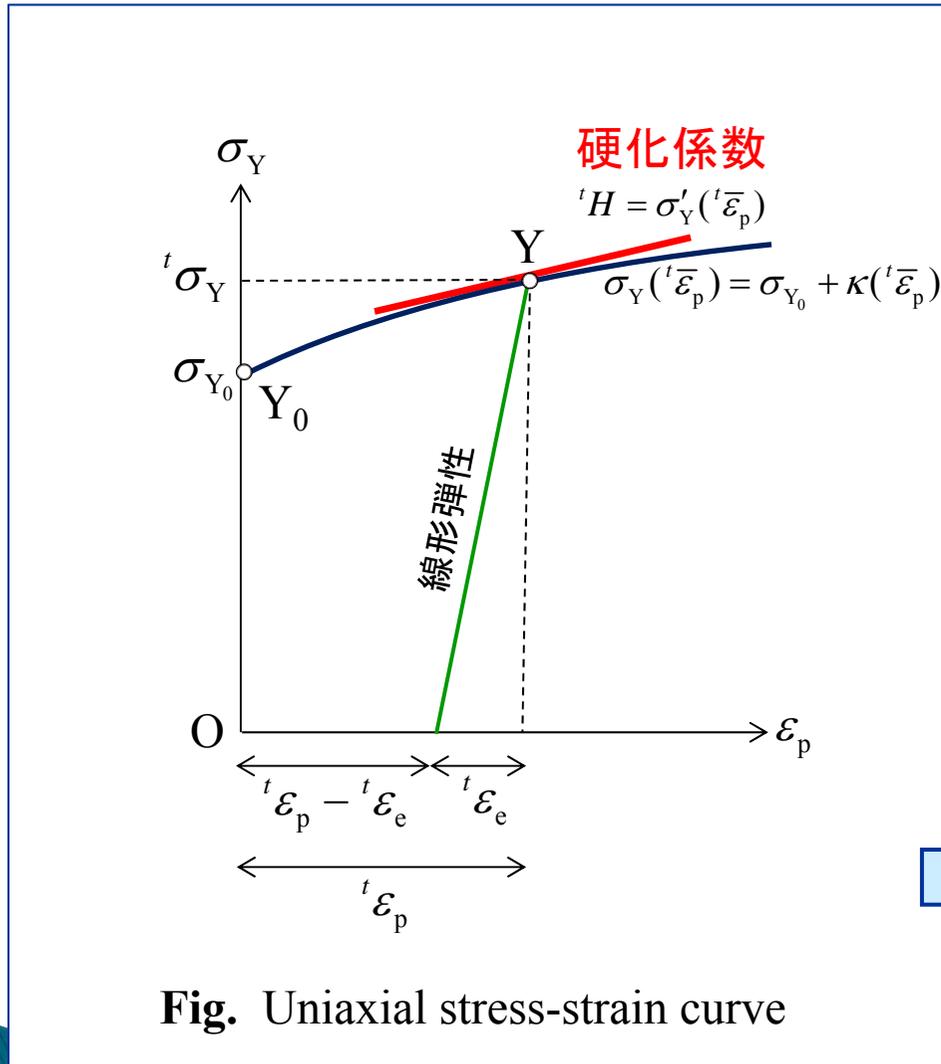


Fig. Yield surface

降伏局面が塑性ひずみ速度と  
垂直になる

(※) FrontISTRには、関連流れ則のみが実装されています  
非関連流れ則は使用できません

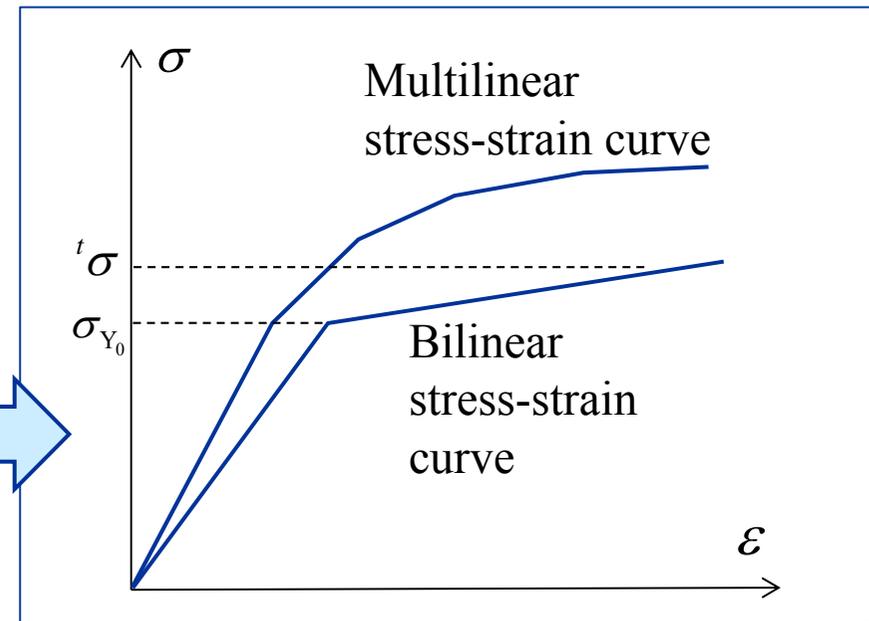
# 硬化則：降伏応力の発展



$${}^t\sigma_Y = \sigma_Y({}^t\bar{\epsilon}_p) \quad \dots(15)$$

軸方向累積塑性ひずみ

$${}^t\dot{\epsilon}_p = -{}^t\dot{\gamma} \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\kappa} \quad \dots(16)$$



(※) FrontISTRでは、4種類の硬化則 (Bilinear, Multilinear, Swift, Ramberg-Osgood) を使用できます

# 連続接線係数 (1/2)

時間的に連続な弾塑性係数を求めます

$$\begin{aligned}
 {}^t\dot{F} &= \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\sigma} : {}^t\dot{\sigma} + \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\sigma_Y} {}^t\dot{\sigma}_Y \\
 &= {}^tA : \{C_e : ({}^t\dot{\varepsilon} - {}^t\dot{\varepsilon}_p)\} - {}^t\dot{\gamma} {}^tb \\
 &= {}^tA : C_e : ({}^t\dot{\varepsilon} - {}^t\dot{\gamma} {}^tA) - {}^t\dot{\gamma} {}^tb = 0
 \end{aligned}$$

$${}^tA : C_e : {}^t\dot{\varepsilon} - {}^t\dot{\gamma} {}^tA : C_e : {}^tA = {}^t\dot{\gamma} {}^tb$$

$$\therefore {}^t\dot{\gamma} = \frac{{}^tA : C_e : {}^t\dot{\varepsilon}}{{}^tb + {}^tA : C_e : {}^tA} \quad \dots(17)$$

$${}^tA = \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\sigma} \quad \dots(18)$$

$${}^tb = -\frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\sigma_Y} \frac{{}^t\dot{\sigma}_Y}{{}^t\dot{\gamma}}$$

$$= -\frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\sigma_Y} \sigma'_Y ({}^t\bar{\varepsilon}_p) {}^t\dot{\varepsilon}_p \frac{1}{{}^t\dot{\gamma}}$$

$$= -\frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\sigma_Y} {}^tH \frac{{}^t\dot{\varepsilon}_p}{{}^t\dot{\gamma}} \quad \dots(19)$$

(※) 現バージョンのFrontISTRでは、連続接線係数をDマトリックスとして使用しています

# 連続接線係数 (2/2)

時間的に連続な弾塑性係数を求めます

$$\begin{aligned}
 {}^t\dot{\sigma} &= C_e : ({}^t\dot{\varepsilon} - {}^t\dot{\varepsilon}_p) \\
 &= C_e : ({}^t\dot{\varepsilon} - {}^t\dot{\gamma} {}^tA) \\
 &= C_e : \left( {}^t\dot{\varepsilon} - \frac{{}^tA : C_e : {}^t\dot{\varepsilon}}{{}^tb + {}^tA : C_e : {}^tA} {}^tA \right) \\
 &= C_e : \left( {}^t\dot{\varepsilon} - \frac{{}^tA \otimes {}^tA : C_e : {}^t\dot{\varepsilon}}{{}^tb + {}^tA : C_e : {}^tA} \right) \\
 &= C_e : {}^t\dot{\varepsilon} - \frac{C_e : {}^tA \otimes {}^tA : C_e}{{}^tb + {}^tA : C_e : {}^tA} : {}^t\dot{\varepsilon} \\
 &= \left( C_e - \frac{C_e : {}^tA \otimes {}^tA : C_e}{{}^tb + {}^tA : C_e : {}^tA} \right) : {}^t\dot{\varepsilon} \\
 &= {}^tC_{ep} : {}^t\dot{\varepsilon} \quad \dots(20)
 \end{aligned}$$

$${}^t\dot{\gamma} = \frac{{}^tA : C_e : {}^t\dot{\varepsilon}}{{}^tb + {}^tA : C_e : {}^tA} \quad \dots(21)$$

$$\begin{aligned}
 {}^tC_{ep} &= C_e - \frac{C_e : {}^tA \otimes {}^tA : C_e}{{}^tb + {}^tA : C_e : {}^tA} \\
 &= C_e - \frac{C_e : \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\sigma} \otimes \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\sigma} : C_e}{-\frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\sigma_Y} {}^tH \frac{{}^t\dot{\varepsilon}_p}{{}^t\dot{\gamma}} + \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\sigma} : C_e : \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\sigma}} \quad \dots(22)
 \end{aligned}$$

# 連続接線係数: von Misesの降伏関数の場合 (1/2)

von Misesの降伏関数

$$\begin{aligned}
 F({}^t\boldsymbol{\sigma}, \sigma_Y) &= {}^t\sigma_{\text{Mises}} - {}^t\sigma_Y \\
 &= \sqrt{3J_2({}^t\boldsymbol{\sigma})} - {}^t\sigma_Y \\
 &= \sqrt{-3I_2({}^t\boldsymbol{\sigma}') - \frac{1}{3}({}^t\text{tr}\boldsymbol{\sigma}')^2} - {}^t\sigma_Y \quad \dots(23)
 \end{aligned}$$

降伏応力

$$\sigma_Y({}^t\bar{\varepsilon}_p) = \sigma_{Y_0} + \kappa({}^t\bar{\varepsilon}_p) \quad \dots(24)$$

偏差応力の第2不変量

$$\begin{aligned}
 I_2({}^t\boldsymbol{\sigma}') &= \frac{1}{2} \{ (\text{tr}{}^t\boldsymbol{\sigma}')^2 - \text{tr}({}^t\boldsymbol{\sigma}' \cdot {}^t\boldsymbol{\sigma}') \} \\
 &= -\frac{1}{2} \text{tr}({}^t\boldsymbol{\sigma}' \cdot {}^t\boldsymbol{\sigma}') \\
 &= -\frac{1}{2} {}^t\boldsymbol{\sigma}' : {}^t\boldsymbol{\sigma}' \\
 &= -\frac{1}{2} {}^t\boldsymbol{\sigma} : {}^t\boldsymbol{\sigma}' \quad \dots(25)
 \end{aligned}$$

関連流れ則

$$\begin{aligned}
 {}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p &= {}^t\dot{\gamma} \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\boldsymbol{\sigma}} \\
 &= {}^t\dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{{}^t\boldsymbol{\sigma}'}{\sqrt{{}^t\boldsymbol{\sigma}' : {}^t\boldsymbol{\sigma}'}} \\
 &= {}^t\dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{{}^t\boldsymbol{\sigma}'}{\sqrt{{}^t\boldsymbol{\sigma} : {}^t\boldsymbol{\sigma}'}} \quad \dots(26)
 \end{aligned}$$

非圧縮条件

$$\text{tr}{}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = ({}^t\varepsilon_p)_{11} + ({}^t\varepsilon_p)_{22} + ({}^t\varepsilon_p)_{33} = 0 \quad \dots(27)$$

$$\begin{aligned}
 {}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p &= -{}^t\dot{\gamma} \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\kappa} \\
 &= {}^t\dot{\gamma} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{{}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p : {}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p}{\sqrt{{}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p : {}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p}} \quad \dots(28)
 \end{aligned}$$

# 連続接線係数: von Misesの降伏関数の場合 (2/2)

$$\begin{aligned}
 {}^tC_{ep} &= C_e - \frac{C_e : {}^tA \otimes {}^tA : C_e}{{}^tb + {}^tA : C_e : {}^tA} \\
 &= C_e - \frac{\frac{3}{2} C_e : \frac{{}^t\sigma'}{\sqrt{{}^t\sigma' : {}^t\sigma'}} \otimes \frac{{}^t\sigma'}{\sqrt{{}^t\sigma' : {}^t\sigma'}} : C_e}{{}^tH + \frac{3}{2} \frac{{}^t\sigma'}{\sqrt{{}^t\sigma' : {}^t\sigma'}} : C_e : \frac{{}^t\sigma'}{\sqrt{{}^t\sigma' : {}^t\sigma'}}} \\
 &= C_e - \frac{\frac{3}{2} \frac{2\mu {}^t\sigma'}{\sqrt{{}^t\sigma' : {}^t\sigma'}} \otimes \frac{2\mu {}^t\sigma'}{\sqrt{{}^t\sigma' : {}^t\sigma'}}}{{}^tH + \frac{3}{2} 2\mu \frac{{}^t\sigma' : {}^t\sigma'}{{}^t\sigma' : {}^t\sigma'}} \\
 &= C_e - \frac{6\mu^2 \frac{{}^t\sigma' \otimes {}^t\sigma'}{{}^t\sigma' : {}^t\sigma'}}{{}^tH + 3\mu} \\
 &= C_e - \frac{6\mu^2 \frac{{}^t\sigma' \otimes {}^t\sigma'}{{}^t\sigma' : {}^t\sigma'}}{{}^tH + 3\mu} \\
 &= C_e - \frac{6\mu^2}{{}^tH + 3\mu} \frac{{}^t\varepsilon'_e}{\sqrt{\varepsilon'_e : \varepsilon'_e}} \otimes \frac{{}^t\varepsilon'_e}{\sqrt{\varepsilon'_e : \varepsilon'_e}} \quad \dots(29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^tA &= \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\sigma} \\
 &= \frac{{}^t\dot{\varepsilon}_p}{{}^t\dot{\gamma}} \\
 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{{}^t\sigma'}{\sqrt{{}^t\sigma' : {}^t\sigma'}} \quad \dots(30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^tb &= -\frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\sigma_Y} {}^tH \frac{{}^t\dot{\varepsilon}_p}{{}^t\dot{\gamma}} \\
 &= -(-1) {}^tH \quad (1) \\
 &= {}^tH \quad \dots(31)
 \end{aligned}$$

# 連続接線係数: Drucker-Pragerの降伏関数の場合 (1/3)

Drucker-Pragerの降伏関数

$$\begin{aligned}
 F({}^t\boldsymbol{\sigma}, {}^t\kappa) &= \sqrt{J_2({}^t\boldsymbol{\sigma})} + \frac{\eta(\phi)}{3} \operatorname{tr} {}^t\boldsymbol{\sigma} - {}^t c \xi(\phi) \\
 &= \sqrt{-I_2({}^t\boldsymbol{\sigma}') + \frac{\eta(\phi)}{3} \operatorname{tr} {}^t\boldsymbol{\sigma} - {}^t c \xi(\phi)} \\
 &\quad \dots(32)
 \end{aligned}$$

$$\xi(\phi) = \frac{6 \cos \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)} \quad \dots(33)$$

$$\eta(\phi) = \frac{6 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)} \quad \dots(34)$$

$\phi$  : 内部摩擦角

${}^t c$  : 粘着力

降伏応力

$$c({}^t\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) = c_0 + \kappa({}^t\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \quad \dots(35)$$

偏差応力の第2不変量

$$\begin{aligned}
 I_2({}^t\boldsymbol{\sigma}') &= \frac{1}{2} \{ (\operatorname{tr} {}^t\boldsymbol{\sigma}')^2 - \operatorname{tr} ({}^t\boldsymbol{\sigma}' \cdot {}^t\boldsymbol{\sigma}') \} \\
 &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} ({}^t\boldsymbol{\sigma}' \cdot {}^t\boldsymbol{\sigma}') \\
 &= -\frac{1}{2} {}^t\boldsymbol{\sigma}' : {}^t\boldsymbol{\sigma}' \\
 &= -\frac{1}{2} {}^t\boldsymbol{\sigma} : {}^t\boldsymbol{\sigma}' \quad \dots(36)
 \end{aligned}$$

関連流れ則

$${}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = {}^t\dot{\gamma} \frac{\partial {}^t F}{\partial {}^t\boldsymbol{\sigma}} \quad \dots(37)$$

非圧縮条件

$$\operatorname{tr} {}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = ({}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p)_{11} + ({}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p)_{22} + ({}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p)_{33} = 0 \quad \dots(38)$$

$${}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = -{}^t\dot{\gamma} \frac{\partial {}^t F}{\partial {}^t\kappa} \quad \dots(39)$$

# 連続接線係数: Drucker-Pragerの降伏関数の場合 (2/3)

(1) Drucker-Pragerの円錐の滑らかな面で降伏する場合

$$\begin{aligned}
 {}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p &= {}^t\dot{\gamma} \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\boldsymbol{\sigma}} & {}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p &= -{}^t\dot{\gamma} \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\boldsymbol{\kappa}} \\
 &= {}^t\dot{\gamma} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{{}^t\boldsymbol{\sigma}'}{\sqrt{{}^t\boldsymbol{\sigma}' : {}^t\boldsymbol{\sigma}'}} + \frac{\eta(\phi)}{3} \delta_{ki} \delta_{kj} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \right) & &= \dot{\gamma} \xi(\phi) \quad \dots(41) \\
 &= {}^t\dot{\gamma} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{{}^t\boldsymbol{\sigma}'}{\sqrt{-2I_2({}^t\boldsymbol{\sigma}')}} + \frac{\eta(\phi)}{3} \mathbf{I} \right) \\
 &= {}^t\dot{\gamma} \left( \frac{{}^t\boldsymbol{\sigma}'}{2\sqrt{J_2({}^t\boldsymbol{\sigma})}} + \frac{\eta(\phi)}{3} \mathbf{I} \right) \\
 &= {}^t\dot{\gamma} \left( \frac{1}{2\sqrt{J_2({}^t\boldsymbol{\sigma})}} {}^t\boldsymbol{\sigma}' + \frac{\eta(\phi)}{3} \mathbf{I} \right) \quad \dots(40)
 \end{aligned}$$

(2) Drucker-Pragerの円錐の頂点で降伏する場合

$$\text{tr} {}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = ({}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p)_{11} + ({}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p)_{22} + ({}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p)_{33} = {}^t\dot{\gamma} \text{tr} \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\boldsymbol{\sigma}} = {}^t\dot{\gamma} \eta(\phi) \quad \dots(42)$$

$${}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = -{}^t\dot{\gamma} \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\boldsymbol{\kappa}} = {}^t\dot{\gamma} \xi(\phi) = \frac{\xi(\phi)}{\eta(\phi)} \text{tr} {}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \quad \dots(43)$$

## 連続接線係数: Drucker-Pragerの降伏関数の場合 (3/3)

(1) Drucker-Pragerの円錐の滑らかな面で降伏する場合

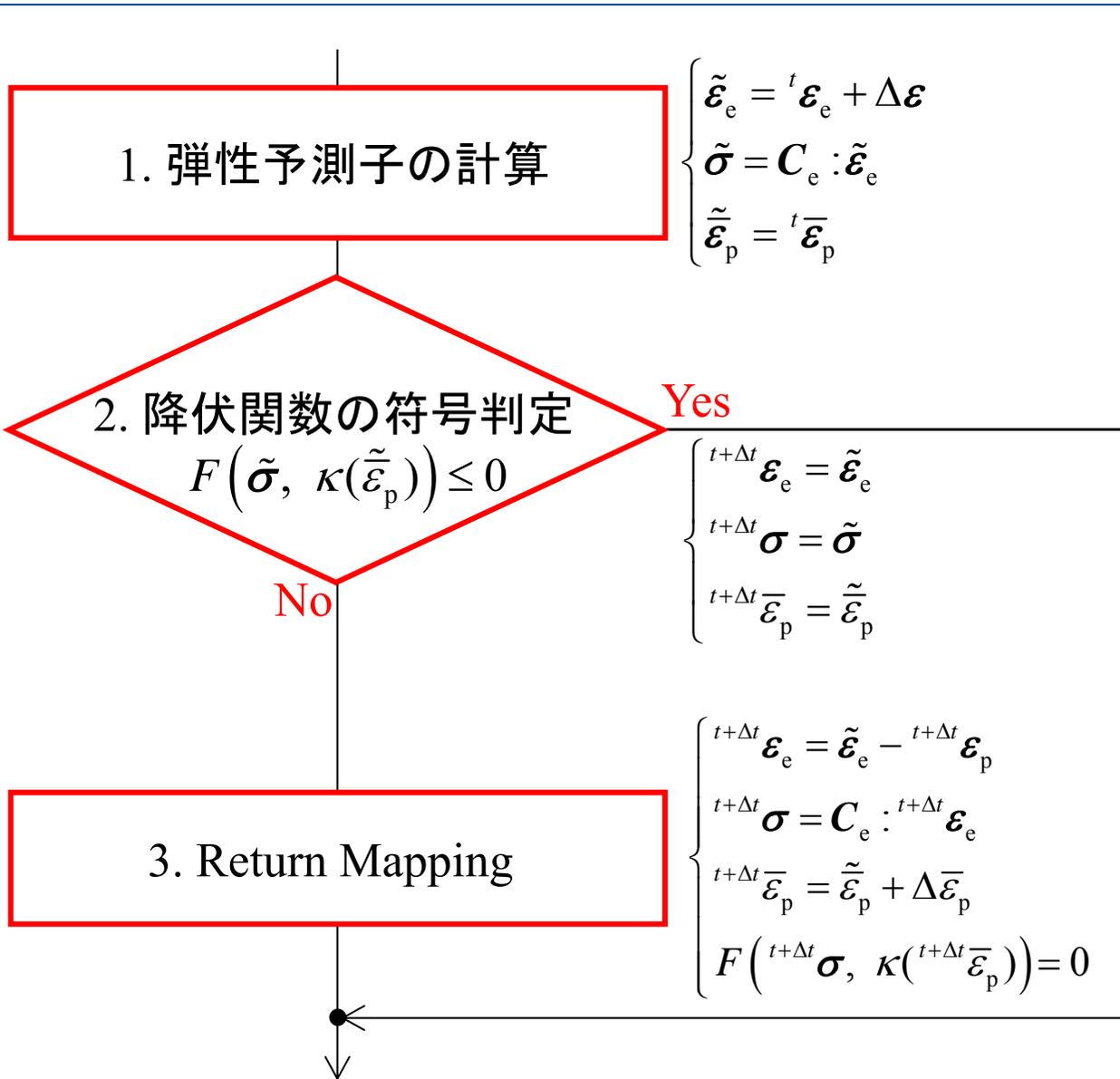
$${}^t\mathbf{C}_{ep} = \mathbf{C}_e - \frac{\mathbf{C}_e : {}^t\mathbf{A} \otimes {}^t\mathbf{A} : \mathbf{C}_e}{{}^tb + {}^t\mathbf{A} : \mathbf{C}_e : {}^t\mathbf{A}} \dots(44)$$

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{A} &= \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^t\boldsymbol{\sigma}} \\ &= \frac{{}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p}{{}^t\dot{\gamma}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{J_2({}^t\boldsymbol{\sigma})}} {}^t\boldsymbol{\sigma}' + \frac{\eta(\phi)}{3} \mathbf{I} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{{}^t\boldsymbol{\sigma}'}{\sqrt{{}^t\boldsymbol{\sigma}' : {}^t\boldsymbol{\sigma}'}} + \frac{\eta(\phi)}{3} \mathbf{I} \dots(45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^tb &= -\frac{\partial {}^tF}{\partial {}^tc} c'({}^t\bar{\varepsilon}_p) {}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \frac{1}{{}^t\dot{\gamma}} \\ &= -\frac{\partial {}^tF}{\partial {}^tc} {}^tH \frac{{}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p}{{}^t\dot{\gamma}} \\ &= -(-\xi(\phi)) {}^tH \xi(\phi) \\ &= {}^tH \xi(\phi) \xi(\phi) \dots(46) \end{aligned}$$

(※) 現バージョンのFrontISTRでは, Drucker-Pragerの円錐の滑らかな面で降伏する場合のみを考えています

# 時間積分アルゴリズム



# 時間積分アルゴリズム: von Misesの降伏関数の場合 (1/3)

## 1. 弾性予測子の計算

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{tr } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \text{tr } {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_e + \text{tr } \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}'_e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}') \quad \dots(47a) \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_e : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \\ \quad = \tilde{p} \mathbf{I} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' \quad (\tilde{p} = K \text{tr } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' = 2 \mu \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e) \quad \dots(47b) \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = {}^t \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \quad \dots(47c) \end{array} \right.$$

## 2. 降伏関数の符号判定

$$F(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \kappa(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p)) = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}'} - \sigma_Y(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \quad \dots(48)$$

降伏関数  $F(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \kappa(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p)) \leq 0$  ならば

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_e = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \quad \dots(49a) \\ {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ \quad = {}^{t+\Delta t} p \mathbf{I} + {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}' \quad ({}^{t+\Delta t} p = \tilde{p}, {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}' = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}'_e) \quad \dots(49b) \\ {}^{t+\Delta t} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \quad \dots(49c) \end{array} \right.$$

# 時間積分アルゴリズム: von Misesの降伏関数の場合 (2/3)

降伏関数  $F(\tilde{\sigma}, \kappa(\tilde{\varepsilon}_p)) > 0$  ならば

## 3. Return Mapping

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_e = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_p \\ \quad = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - \Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}'}{\sqrt{{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}' : {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}'}} \quad \left( \text{tr } {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_e = \text{tr } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e, \quad {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}'_e = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e - \Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}'}{\sqrt{{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}' : {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}'}} \right) \\ \dots (50a) \\ {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_e : {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_e \\ \quad = {}^{t+\Delta t} p \mathbf{I} + {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}' \quad ({}^{t+\Delta t} p = \tilde{p}, \quad {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}' = 2\mu {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}'_e) \\ \dots (50b) \\ {}^{t+\Delta t} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \Delta\gamma \\ \dots (50c) \\ F({}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}, \kappa({}^{t+\Delta t} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p)) = \sqrt{\frac{3}{2} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}' : {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}'} - \sigma_Y({}^{t+\Delta t} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \\ \quad = 0 \\ \dots (50d) \end{array} \right.$$

# 時間積分アルゴリズム: von Misesの降伏関数の場合 (3/3)

$$\begin{aligned}
 & F\left({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}, \kappa({}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p)\right) \quad \text{式 (50d) より} \\
 & = \sqrt{\frac{3}{2} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}' : {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}' - \sigma_Y({}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p)} \\
 & = \sqrt{\frac{3}{2} \left(1 - \frac{\Delta\gamma 3\mu}{\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}}\right) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' : \left(1 - \frac{\Delta\gamma 3\mu}{\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}}\right) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' - \sigma_Y(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \Delta\gamma)} \\
 & = \left(1 - \frac{\Delta\gamma 3\mu}{\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}}\right) \sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})} - \sigma_Y(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \Delta\gamma) \\
 & = \sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})} - \Delta\gamma 3\mu - \sigma_Y(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \Delta\gamma) = 0 \quad \dots(51)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}' & = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' - \Delta\gamma 2\mu \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}'}{\sqrt{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}' : {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}'}} \\
 & = \left(1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta\gamma 2\mu}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}}\right) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' \\
 & = \left(1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta\gamma 2\mu}{\sqrt{-2I_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}')}}\right) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' \\
 & = \left(1 - \frac{\Delta\gamma 3\mu}{\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}}\right) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' \quad \dots(52)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta\gamma 2\mu}{\sqrt{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}' : {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}'}}\right) {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}' = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' \\
 & \therefore \frac{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}'}{\sqrt{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}' : {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}'}} = \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}} \quad \dots(53)
 \end{aligned}$$

$f(x) = \sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})} - x3\mu - \sigma_Y(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + x)$  において

Newton-Raphson法で計算

$${}^{(m)}x = {}^{(m-1)}x + {}^{(m)}\Delta x \quad \dots(54)$$

$$\begin{aligned}
 {}^{(m)}\Delta x & = -\frac{f({}^{(m-1)}x)}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x={}^{(m-1)}x}} \\
 & = \frac{f({}^{(m-1)}x)}{3\mu + {}^{(m-1)}H} \quad \dots(55)
 \end{aligned}$$

# 時間積分アルゴリズム: Drucker-Pragerの降伏関数の場合 (1/3)

## 1. 弾性予測子の計算

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{tr } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \text{tr } {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_e + \text{tr } \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}'_e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}') \quad \cdots(56a) \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_e : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \\ \quad = \tilde{p} \mathbf{I} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' \quad (\tilde{p} = K \text{tr } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' = 2 \mu \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e) \quad \cdots(56b) \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = {}^t \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \quad \cdots(56c) \end{array} \right.$$

## 2. 降伏関数の符号判定

$$F(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \kappa(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p))$$

降伏関数  $F(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \kappa(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p)) \leq 0$  ならば

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_e = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \quad \cdots(57a) \\ {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ \quad = {}^{t+\Delta t} p \mathbf{I} + {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}' \quad ({}^{t+\Delta t} p = \tilde{p}, {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}' = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}'_e) \quad \cdots(57b) \\ {}^{t+\Delta t} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \quad \cdots(57c) \end{array} \right.$$

## 時間積分アルゴリズム: Drucker-Pragerの降伏関数の場合 (2/3)

降伏関数  $F(\tilde{\sigma}, \kappa(\tilde{\varepsilon}_p)) > 0$  ならば

### 3. Return Mapping

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_e = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_p \\ \quad = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - \frac{1}{3} (\text{tr } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \mathbf{I} - \Delta\gamma \frac{\partial {}^{t+\Delta t} F}{\partial {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}} \quad \left( \text{tr } {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_e = \text{tr } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - \text{tr } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p, \quad {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}'_e = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e - \Delta\gamma \frac{\partial {}^{t+\Delta t} F}{\partial {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}} \right) \\ \dots (58a) \\ {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_e : {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_e \\ \quad = {}^{t+\Delta t} p \mathbf{I} + {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}' \quad ({}^{t+\Delta t} p = K \text{tr } {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_e, \quad {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}' = 2\mu {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}'_e) \\ \dots (58b) \\ {}^{t+\Delta t} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \\ \dots (58c) \\ F({}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}, \kappa({}^{t+\Delta t} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p)) = 0 \\ \dots (58d) \end{array} \right.$$

# 時間積分アルゴリズム: Drucker-Pragerの降伏関数の場合 (3/3)

(1) Drucker-Pragerの円錐の滑らかな面で降伏する場合

$$\begin{aligned}
 {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C}_e : {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}_e \quad ({}^{t+\Delta t}p = K \operatorname{tr} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}_e, \quad {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}' = 2\mu {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}'_e) \\
 &= \mathbf{C}_e : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - \mathbf{C}_e : \Delta\gamma \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\Theta}{\partial {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}} \\
 &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \Delta\gamma \mathbf{C}_e : \left( \frac{1}{2\sqrt{J_2}({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma})} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}' + \frac{\eta(\psi)}{3} \mathbf{I} \right) \\
 &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \Delta\gamma \left( \frac{\mu}{\sqrt{J_2}({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma})} \mathbf{C}_e : {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}'_e + \frac{\eta(\psi)}{3} \mathbf{C}_e : \mathbf{I} \right) \quad \dots(59) \\
 &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \Delta\gamma \left( \frac{\mu}{\sqrt{J_2}({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma})} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}' + K \eta(\psi) \mathbf{I} \right) \quad \dots(59)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{C}_e)_{ijkl} \delta_{kl} &= \left\{ \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right\} \delta_{kl} \\
 &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \delta_{kl} \\
 &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kk} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jk}) \\
 &= 3\lambda \delta_{ij} + \mu(\delta_{ij} + \delta_{ij}) \\
 &= (3\lambda + 2\mu) \delta_{ij} \\
 &= 3 \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \delta_{ij} \\
 &= 3K \delta_{ij} \quad \dots(61)
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 {}^{t+\Delta t}p = \tilde{p} - \Delta\gamma K \eta(\psi) \\
 {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}' = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' - \Delta\gamma \mu \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}{\sqrt{J_2}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})} \\
 = \left( 1 - \frac{\Delta\gamma \mu}{\sqrt{J_2}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})} \right) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' \quad \dots(60)
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}' &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' - \Delta\gamma \frac{\mu}{\sqrt{J_2}({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma})} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}' \\
 \left( 1 + \frac{\Delta\gamma \mu}{\sqrt{J_2}({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma})} \right) {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}' &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' \\
 \therefore \frac{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}'}{\sqrt{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}' : {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}'}} &= \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}} \\
 \frac{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}'}{\sqrt{-2I_2({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}')}} &= \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}{\sqrt{-2I_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}')}} \\
 \frac{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}'}{\sqrt{J_2({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma})}} &= \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}{\sqrt{J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}')}} \quad \dots(62)
 \end{aligned}$$

## 時間積分アルゴリズム: Drucker-Pragerの降伏関数の場合 (5/6)

$$\begin{aligned}
 F({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}, {}^{t+\Delta t}K) &= \sqrt{J_2({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma})} + \frac{\eta(\phi)}{3} \text{tr } {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} - c({}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}_p) \xi(\phi) \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}' : {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}' + \eta(\phi) (\tilde{p} - \Delta\gamma K \eta(\phi)) - c({}^t\bar{\varepsilon}_p + \Delta\bar{\varepsilon}_p) \xi(\phi)} \\
 &= \left(1 - \frac{\Delta\gamma \mu}{\sqrt{J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}}\right) \sqrt{\frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' + \eta(\phi) (\tilde{p} - \Delta\gamma K \eta(\phi)) - c({}^t\bar{\varepsilon}_p + \Delta\gamma \xi(\phi)) \xi(\phi)} \\
 &= \left(1 - \frac{\Delta\gamma \mu}{\sqrt{J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}}\right) \sqrt{J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \eta(\phi) (\tilde{p} - K \eta(\phi) \Delta\gamma) - \xi(\phi) c({}^t\bar{\varepsilon}_p + \xi(\phi) \Delta\gamma)} \\
 &= \sqrt{J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) - \mu \Delta\gamma + \eta(\phi) (\tilde{p} - K \eta(\phi) \Delta\gamma) - \xi(\phi) c({}^t\bar{\varepsilon}_p + \xi(\phi) \Delta\gamma)} = 0 \quad \dots (63)
 \end{aligned}$$

$f(x) = \sqrt{J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) - \mu x + \eta(\phi) (\tilde{p} - K \eta(\phi) x) - \xi(\phi) c({}^t\bar{\varepsilon}_p + \xi(\phi) x)}$  において

Newton-Raphson法で計算

$${}^{(m)}x = {}^{(m-1)}x + {}^{(m)}\Delta x \quad \dots (64)$$

$$\begin{aligned}
 {}^{(m)}\Delta x &= -\frac{f({}^{(m-1)}x)}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x={}^{(m-1)}x}} \\
 &= \frac{f({}^{(m-1)}x)}{\mu + \eta(\phi)\eta(\phi)K + \xi(\phi)\xi(\phi){}^{(m-1)}H} \quad \dots (65)
 \end{aligned}$$

(※) 現バージョンのFrontISTRでは、Drucker-Pragerの円錐の滑らかな面で降伏する場合のみを考えています

# 時間積分アルゴリズム: Drucker-Pragerの降伏関数の場合 (6/6)

(2) Drucker-Pragerの円錐の頂点で降伏する場合

$$\begin{aligned}
 F({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\kappa}) &= \frac{\eta(\phi)}{3} \operatorname{tr} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} - c({}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}_p) \xi(\phi) \\
 &= K \eta(\phi) \operatorname{tr} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}_e - c({}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}_p) \xi(\phi) \\
 &= K \eta(\phi) (\operatorname{tr} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - \operatorname{tr} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) - c({}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}_p) \xi(\phi) \\
 &= \eta(\phi) (\tilde{p} - K \operatorname{tr} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) - c({}^{t+\Delta t}\bar{\varepsilon}_p) \xi(\phi) \\
 &= \eta(\phi) (\tilde{p} - K \operatorname{tr} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p) - c({}^t\bar{\varepsilon}_p + \Delta \bar{\varepsilon}_p) \xi(\phi) \\
 &= \eta(\phi) (\tilde{p} - K \operatorname{tr} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p) - c\left({}^t\bar{\varepsilon}_p + \frac{\xi(\phi)}{\eta(\phi)} \operatorname{tr} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p\right) \xi(\phi) = 0 \quad \dots (65)
 \end{aligned}$$

$$f(x) = c\left({}^t\bar{\varepsilon}_p + \frac{\xi(\phi)}{\eta(\phi)} x\right) \frac{\xi(\phi)}{\eta(\phi)} - \tilde{p} + K x = 0 \quad \text{と} \text{お} \text{い} \text{て}$$

Newton-Raphson法で計算

$${}^{(m)}x = {}^{(m-1)}x + {}^{(m)}\Delta x \quad \dots (66)$$

$$\begin{aligned}
 {}^{(m)}\Delta x &= -\frac{f({}^{(m-1)}x)}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x={}^{(m-1)}x}} \\
 &= -\frac{f({}^{(m-1)}x)}{\frac{\xi(\phi)}{\eta(\phi)} \frac{\xi(\phi)}{\eta(\phi)} H + K} \quad \dots (67)
 \end{aligned}$$

(※) 次バージョンのFrontISTR  
では、Drucker-Pragerの円錐の  
頂点で降伏する場合も  
実装する予定です

## ユーザマニュアル該当箇所について (1/3)

- FrontISTRによる弾塑性解析のパラメータを確認するため、FrontISTRのユーザマニュアル (ファイル名「[FrontISTR\\_user\\_manual\\_Ver36.pdf](#)」) の該当箇所を見ます
- FrontISTRソースコード「[FrontISTR\\_V44.tar.gz](#)」を解凍すると、ディレクトリ「[FrontISTR\\_V44](#)」ができます  
FrontISTRのユーザマニュアルはディレクトリ「[FrontISTR\\_V44/doc](#)」内にあります
- FrontISTRのユーザマニュアルの[124ページ](#)～[126ページ](#)に弾塑性解析のパラメータに関する記述があります

# ユーザマニュアル該当箇所について (2/3)

## (4) IPLASTIC (2-2-2)

塑性材料の定義

パラメータ

YIELD = MISES (Default 値)、Mohr-Coulomb、DRUCKER-PRAGER、USER

HARDEN = BILINEAR (Default 値)、MULTILINEAR、SWIFT、RAMBERG-OSGOOD、KINEMATIC、COMBINED

DEPENDENCIES = 0 (Default 値) / 1

2 行目以降

・ YIELD = MISES の場合 (Default 値)

\* HARDEN = BILINEAR (Default 値) の場合

(2 行目) YIELD0, H

\* HARDEN = MULTILINEAR の場合

(2 行目) YIELD, PSTRAIN, Temperature

(3 行目) YIELD, PSTRAIN, Temperature

...続く

\* HARDEN = SWIFT の場合

(2 行目)  $\epsilon_0$ , K, n

\* HARDEN = RAMBERG-OSGOOD の場合

(2 行目)  $\epsilon_0$ , D, n

\* HARDEN = KINEMATIC の場合

(2 行目) YIELD0, C

\* HARDEN = COMBINED の場合

(2 行目) YIELD0, H, C

・ YIELD = Mohr-Coulomb または Drucker-Prager の場合 **大文字が正しい YEALD=MOHR-COULOMBまたはYEALD=DRUCKER-PRAGER**

\* HARDEN = BILINEAR, (Default 値) の場合

(2 行目) c, FAI, H

\* HARDEN = MULTILINEAR の場合 ← マニュアルには記載があるが、実際には対応していない

(2 行目) FAI

(3 行目) PSTRAIN, c

(4 行目) PSTRAIN, c

...続く

HARDEN = 他は無視され、Default 値 (BILINEAR) になる。

変数名	属性	内容
YIELD0	R	初期降伏応力
H	R	硬化係数
PSTRAIN	R	塑性ひずみ
YIELD	R	降伏応力
$\epsilon_0$ , K, n	R	$\bar{\sigma} = k(\epsilon_0 + \bar{\epsilon})^n$ <b>Swift</b>
$\epsilon_0$ , D, n	R	$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \epsilon_0 \left(\frac{\sigma}{D}\right)^n$ <b>Ramberg-Osgood</b>
FAI	R	内部摩擦角
c	R	粘着力
C	R	線形移動硬化係数
Temperature	R	温度 (DEPENDENCIES=1 の時に必要)
v1, v2...v10	R	材料定数

・ YIELD= USER の場合

(2 行目以降) v1, v2, v3, v4, v5, v6, v7, v8, v9, v10

**(YEALD=MOHR-COULOMBまたはYEALD=DRUCKER-PRAGER のとき HARDEN=MULTILINEARは使用できない)**

# ユーザマニュアル該当箇所について (3/3)

使用例

!PLASTIC, YIELD=MISES, HARDEN=MULTILINEAR, DEPENDENCIES=1

276.0, 0.0, 20.	425.0, 0.0571, 100.
296.0, 0.0018, 20.	445.0, 0.0669, 100.
299.0, 0.0053, 20.	450.0, 0.0767, 100.
303.0, 0.008, 20.	460.0, 0.0867, 100.
338.0, 0.0173, 20.	471.0, 0.0967, 100.
372.0, 0.0271, 20.	128.0, 0.0, 400.
400.0, 0.037, 20.	208.0, 0.0018, 400.
419.0, 0.0471, 20.	243.0, 0.0053, 400.
437.0, 0.0571, 20.	259.0, 0.008, 400.
450.0, 0.0669, 20.	309.0, 0.0173, 400.
460.0, 0.0767, 20.	340.0, 0.0271, 400.
469.0, 0.0867, 20.	366.0, 0.037, 400.
477.0, 0.0967, 20.	382.0, 0.0471, 400.
276.0, 0.0, 100.	396.0, 0.0571, 400.
276.0, 0.0018, 100.	409.0, 0.0669, 400.
282.0, 0.0053, 100.	417.0, 0.0767, 400.
295.0, 0.008, 100.	423.0, 0.0867, 400.
330.0, 0.0173, 100.	429.0, 0.0967, 400.
370.0, 0.0271, 100.	
392.0, 0.037, 100.	
410.0, 0.0471, 100.	

指定の温度また塑性ひずみに関する上記の入力データから内挿して、加工硬化係数を計算することになる。各温度値に対して、同じ PSTRAIN 配列を入力することが必要になる。

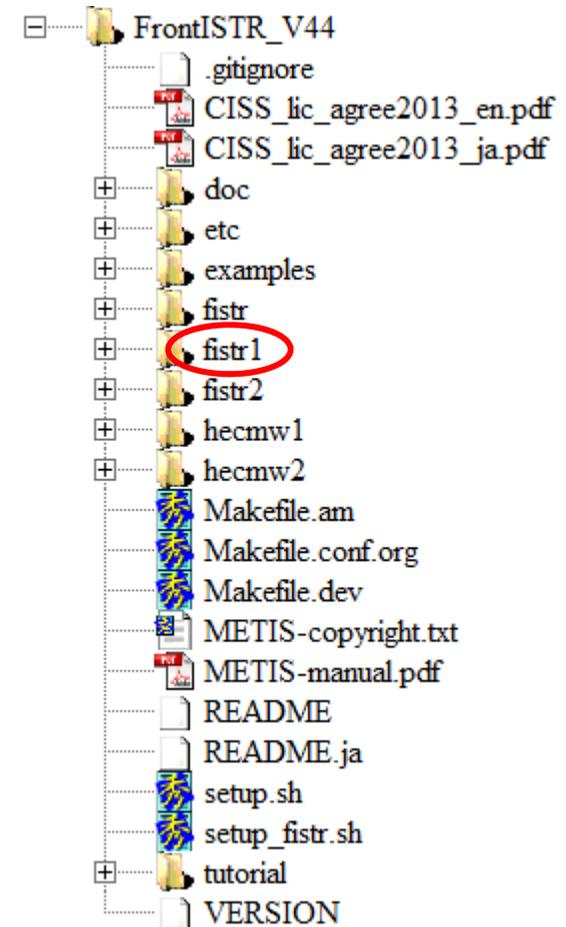
# FrontISTR Ver.4.4のソースプログラム

ソースプログラムFrontISTR\_V44.tar.gzは、  
FrontISTR研究会のホームページ (<http://www.multi.k.u-tokyo.ac.jp/FrontISTR/>) からダウンロードできます

ファイル  
FrontISTR\_V44.tar.gz

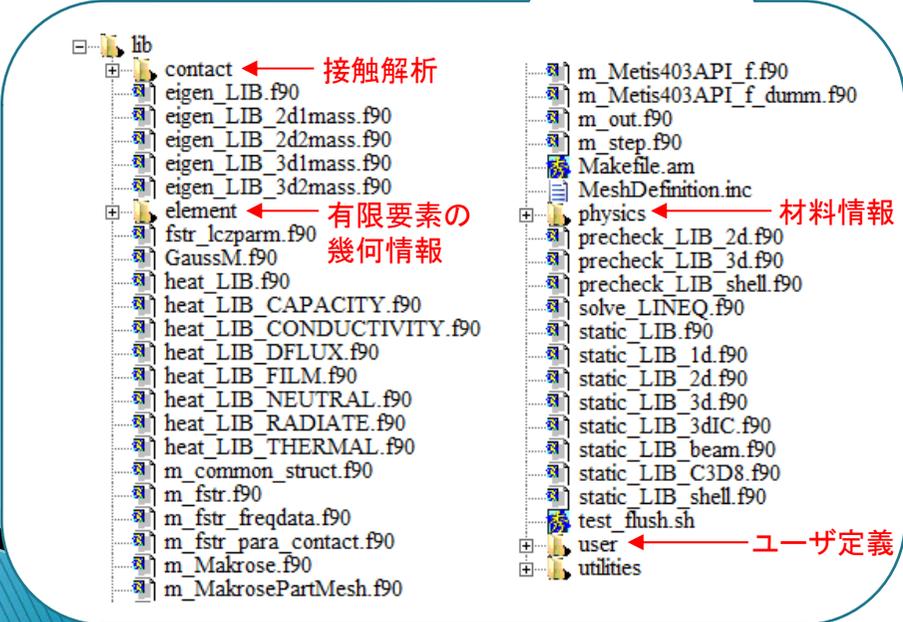
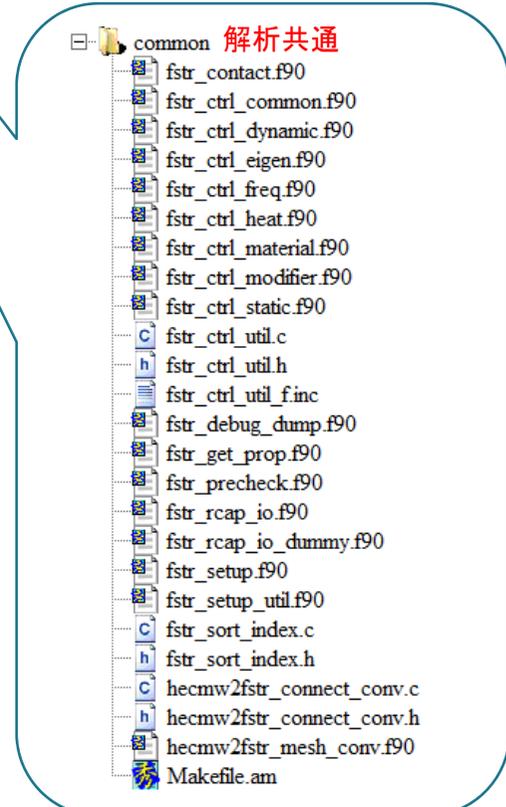
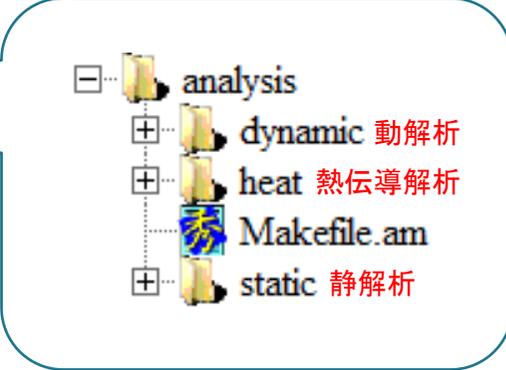
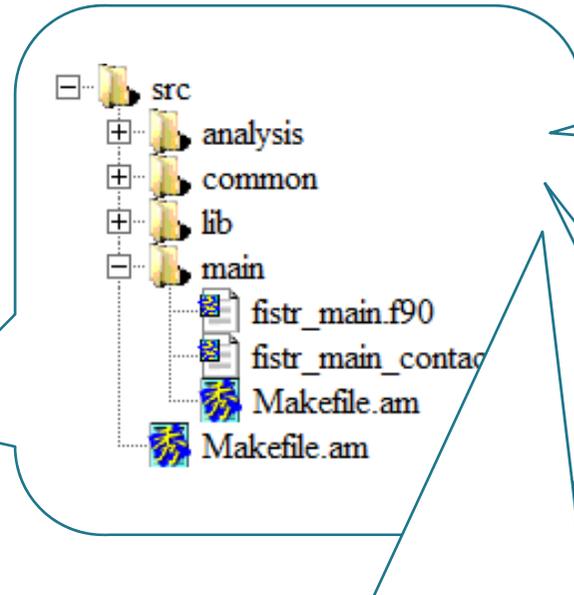
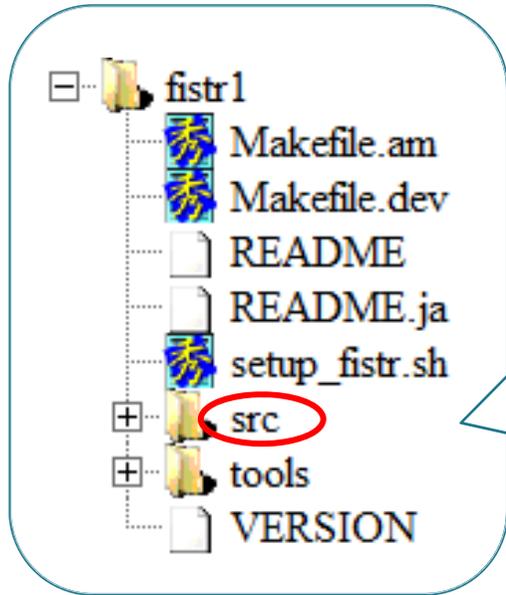


ディレクトリ  
FrontISTR\_V44



この講演では、  
ディレクトリfistr1を対象とします

# ディレクトリfistr1/src



ディレクトリsrc内のディレクトリは analysis, common, lib, mainの四つ

# ディレクトリfistr1/src/lib

- lib
  - contact
  - eigen\_LIB.f90
  - eigen\_LIB\_2d1mass.f90
  - eigen\_LIB\_2d2mass.f90
  - eigen\_LIB\_3d1mass.f90
  - eigen\_LIB\_3d2mass.f90
  - element**
  - fstr\_iczparm.f90
  - GaussM.f90
  - heat\_LIB.f90
  - heat\_LIB\_CAPACITY.f90
  - heat\_LIB\_CONDUCTIVITY.f90
  - heat\_LIB\_DFLUX.f90
  - heat\_LIB\_FILM.f90
  - heat\_LIB\_NEUTRAL.f90
  - heat\_LIB\_RADIATE.f90
  - heat\_LIB\_THERMAL.f90
  - m\_common\_struct.f90
  - m\_fstr.f90
  - m\_fstr\_freqdata.f90
  - m\_fstr\_para\_contact.f90
  - m\_Makrose.f90
  - m\_MakrosePartMesh.f90
  - m\_Metis403API.f.f90
  - m\_Metis403API\_f\_dumm.f90
  - m\_out.f90
  - m\_step.f90
  - Makefile.am
  - MeshDefinition.inc
  - physics**
  - precheck\_LIB\_2d.f90
  - precheck\_LIB\_3d.f90
  - precheck\_LIB\_shell.f90
  - solve\_LINEQ.f90
  - static\_LIB.f90
  - static\_LIB\_1d.f90
  - static\_LIB\_2d.f90
  - static\_LIB\_3d.f90
  - static\_LIB\_3dIC.f90
  - static\_LIB\_beam.f90
  - static\_LIB\_C3D8.f90
  - static\_LIB\_shell.f90
  - test\_flush.sh
  - user
  - utilities

要素剛性マトリックスや  
応力・内力の計算で使用

- element
  - element.f90
  - hex20n.f90
  - hex8n.f90
  - line2n.f90
  - line3n.f90
  - Makefile.am
  - prism15n.f90
  - prism6n.f90
  - quad4n.f90
  - quad8n.f90
  - quad9n.f90
  - quadrature.f90
  - tet10n.f90
  - tet4n.f90
  - tri3n.f90
  - tri6n.f90

有限要素の幾何情報を計算する  
プログラム  
Bマトリックスの計算で使用

材料情報を計算する  
プログラム  
Dマトリックスの計算で使用

- physics
  - calMatMatrix.f90
  - creep.f90
  - ElasticLinear.f90
  - ElasticNeoHooke.f90
  - Elastoplastic.f90**
  - Hyperelastic.f90
  - Makefile.am
  - material.f90
  - mechgauss.f90
  - Viscoelastic.f90

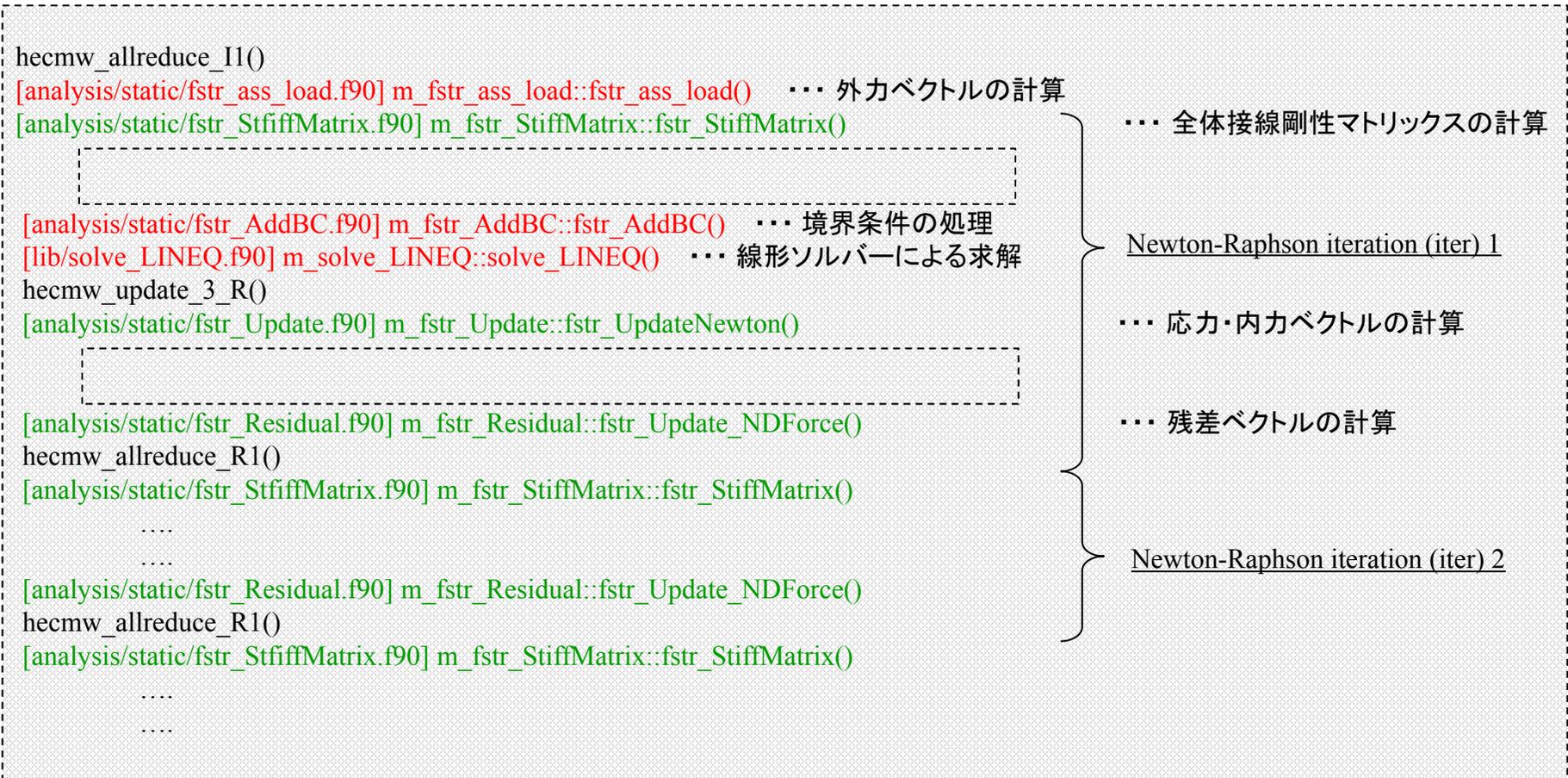
# 弾塑性静解析の流れ (1/3)

```
[main/fistr_main.f90] PROGRAM fstr_main      ... メインプログラム
  hecmw_init()
  hecmw_get_mesh()
  [main/fistr_main.f90] fstr_init()          ... 変数初期化・入力データ読み込み
    hecmw_nullify_matrix ()
    hecmw_nullify_result_data ()
    [main/fistr_main.f90] fstr_init_file()
    hecmw_mat_con ()
    [main/fistr_main.f90] fstr_condition()
      hecmw_ctrl_get_control_file ()
  [main/fistr_main.f90] fstr_nonlinear_static_analysis() ... 非線形静解析用のルーチンへ
    [analysis/static/fstr_solve_NLGEOM.f90] m_fstr_solve_NLGEOM::fstr_solve_nlgeom() ... 時間増分 (BC分割) のループ
    [analysis/static/fstr_solve_Nonlinear.f90] m_fstr_NonLinearMethod::fstr_Newton()
    {
      [analysis/static/fstr_solve_Nonlinear.f90] m_fstr_NonLinearMethod::fstr_Newton()
    }
    {
      [analysis/static/fstr_solve_Nonlinear.f90] m_fstr_NonLinearMethod::fstr_Newton()
    }
    ...
    ...
    [analysis/static/static_output.f90] m_static_output::fstr_static_Output() ... 計算結果の出力
    [analysis/static/static_make_result.f90] m_static_make_result::fstr_write_static_result()
  [main/fistr_main.f90] fstr_finalize()      ... 変数の削除
  hecmw_finalize ()
```

[ディレクトリ/ファイル名] モジュール名::サブルーチン名()を意味しています

# 弾塑性静解析の流れ (2/3)

[analysis/static/fstr\_solve\_Nonlinear.f90] m\_fstr\_NonLinearMethod::fstr\_Newton() ...Newton-Raphson反復



# 弾塑性静解析の流れ (3/3)

[analysis/static/fstr\_StiffMatrix.f90] m\_fstr\_StiffMatrix::fstr\_StiffMatrix()

... 全体接線剛性マトリックスの計算

```
hecmw_mat_clear()
[lib/static_LIB_C3D8.f90] m_static_LIB_C3D8::STF_C3D8Bbar()
[lib/element/element.f90] elementInfo::getNodalNaturalCoord()
[lib/element/element.f90] elementInfo::getShapeDeriv()
[lib/element/element.f90] elementInfo::getQuadPoint()
[lib/element/element.f90] elementInfo::getShapeFunc()
[lib/element/element.f90] elementInfo::getShapeDeriv()
[lib/physics/calMatMatrix.f90] m_MatMatrix::MatlMatrix()
[lib/physics/Elastoplastic.f90] m_ElastoPlastic::calElastoPlastic()
[lib/physics/Elastoplastic.f90] m_ElastoPlastic::getYieldFunction()
[lib/physics/Elastoplastic.f90] m_ElastoPlastic::calKinematicHarden()
[lib/physics/ElasticLinear.f90] m_ElasticLinear::calElasticLinear()
[lib/physics/ElastoPlastic.f90] m_ElastoPlastic::calHardenCoeff()
hecmw_mat_ass_elem()
```

... 六面体1次ソリッド要素  
... 形状関数の微分値  
... Gaussの積分点数  
... 形状関数の値  
... 形状関数の微分値  
... Dマトリックス  
... 弾塑性体の場合  
... 降伏関数  
... 移動硬化による寄与  
... 弾性成分  
... 硬化係数  
... 要素接線剛性マトリックスをassemble

[analysis/static/fstr\_Update.f90] m\_fstr\_Update::fstr\_UpdateNewton()

... 応力・内力ベクトルの計算

```
[lib/static_LIB_C3D8.f90] m_static_LIB_C3D8::Update_C3D8Bbar()
[lib/element/element.f90] elementInfo::getQuadPoint()
[lib/physics/calMatMatrix.f90] m_MatMatrix::MatlMatrix()
[lib/physics/Elastoplastic.f90] m_ElastoPlastic::calElastoPlastic()
[lib/physics/Elastoplastic.f90] m_ElastoPlastic::getYieldFunction()
[lib/physics/Elastoplastic.f90] m_ElastoPlastic::calKinematicHarden()
[lib/physics/ElasticLinear.f90] m_ElasticLinear::calLinearElastic()
[lib/physics/ElastoPlastic.f90] m_ElastoPlastic::calHardenCoeff()
[lib/physics/Elastoplastic.f90] m_ElastoPlastic::BackwardEuler()
hecmw_update_3_R()
```

... 六面体一次ソリッド要素  
... Gaussの積分点数  
... Dマトリックス  
... 弾塑性体の場合  
... 降伏関数  
... 移動硬化による寄与  
... 弾性成分  
... 硬化係数  
... Return Mapping

[ディレクトリ/ファイル名] モジュール名::サブルーチン名()を意味しています

# [lib/physics/Elastoplastic.f90]の内容

モジュール名 : m\_ElastoPlastic

弾塑性体のDマトリックスやReturn Mappingを計算するモジュール

## 使用する他のモジュール

- ・ `lib/physics/material.f90` `mMaterial`  
材料物性の情報を管理するモジュール
- ・ `lib/physics/ElasticLinear.f90` `m_ElasticLinear`  
線形弾性体のD<sub>e</sub>マトリックスを計算するモジュール

## メンバ変数

- ・ 整数型 `kreal`  
実数型の種別値

## メンバ関数

- ・ サブルーチン `calElastoPlasticMatrix()`  
弾塑性体のDマトリックス (連続接線係数) を計算するサブルーチン
- ・ 関数 `cal_equivalent_stress()`  
相当応力を計算する関数
- ・ 関数 `cal_mises_strain()`  
相当ひずみを計算する関数
- ・ 関数 `calHardenCoeff()`  
硬化係数を計算する関数
- ・ 関数 `calKinematicHarden()`  
移動硬化による硬化係数への寄与を計算する関数
- ・ 関数 `calCurrKinematic()`  
移動硬化における状態を計算する関数
- ・ 関数 `calCurrYield()`  
降伏応力を計算する関数
- ・ 関数 `calYieldFunc()`  
降伏関数を計算する関数
- ・ サブルーチン `BackwardEuler()`  
Return Mappingの計算を行うサブルーチン
- ・ サブルーチン `updateEPState()`  
累積塑性ひずみを更新するサブルーチン

# [lib/physics/Elastoplastic.f90]

## m\_ElastoPlastic::calElastoPlasticMatrix() の内容

サブルーチン名: `calElastoPlasticMatrix()`

弾塑性体のDマトリックス (連続接線係数) を計算するサブルーチン

### 引数

- ・構造体(tMaterial) `matl`  
材料に関連するデータ
- ・整数型 `sectType`  
問題の種類 (3次元問題/平面ひずみ/平面応力問題/軸対称問題)
- ・実数型 `stress(6)`  
応力成分
- ・実数型 `extval(:)`  
累積塑性ひずみ, 背応力成分
- ・整数型 `istat`  
状態 (0: 弾性状態, 1: 塑性状態)
- ・実数型 `D(:, :)`  
弾塑性体のDマトリックスの成分
- ・実数型 `temperature` (省略可能)  
温度

### 上位

- ・サブルーチン [lib/physics/calMatMatrix.f90] `m_MatMatrix::MatlMatrix()`

### 下位

- ・関数 [lib/physics/Elastoplastic.f90] `m_ElastoPlastic::getYieldFunction()`
- ・サブルーチン [lib/user/uyield.f90] `uElastoPlasticMatrix()`
- ・関数 [lib/physics/Elastoplastic.f90] `m_ElastoPlastic::calKinematicHarden()`
- ・関数 [lib/physics/Elastoplastic.f90] `m_ElastoPlastic::calHardenCoeff()`
- ・サブルーチン [lib/physics/ElasticLinear.f90] `m_ElasticLinear::calElasticMatrix()`

# [lib/physics/Elastoplastic.f90] m\_ElastoPlastic::BackwardEuler() の内容

サブルーチン名: **BackwardEuler()**  
Return Mappingの計算を行うサブルーチン

## 引数

- ・構造体(tMaterial) matl  
材料に関連するデータ
- ・実数型 stress(6)  
応力成分
- ・実数型 plstrain  
現時刻 $t$ での累積塑性ひずみ
- ・整数型  
状態 (0: 弾性状態, 1: 塑性状態)
- ・実数型 fstat(:)  
累積塑性ひずみと背応力成分
- ・実数型 temp (省略可能)  
温度

## 上位

- ・サブルーチン [lib/static\_LIB\_3d.f90] m\_static\_LIB\_3d::UPDATE\_C3()
- ・サブルーチン [lib/static\_LIB\_C3D8.f90] m\_static\_LIB\_C3D8::UPDATE\_C3D8()

## 下位

- ・サブルーチン [lib/user/uyield.f90] uBackwardEuler()
- ・サブルーチン [lib/utilities/ttable.f90] m\_table::fetch\_TableData()
- ・サブルーチン [lib/utilities/ttable.f90] m\_table::eigen3()

# [lib/physics/ElasticLinear.f90]の内容

モジュール名 : m\_ElasticLinear  
線形弾性体のDマトリックスを計算するモジュール

## 使用する他のモジュール

- ・ `[lib/physics/material.f90]` `mMaterial`  
材料物性の情報を管理するモジュール

## メンバ変数

- ・ 整数型 `kreal`  
実数型の種別値

## メンバ関数

- ・ サブルーチン `calElasticMatrix()`  
3次元問題, 平面ひずみ問題, 平面応力問題, 軸対称問題のDマトリックスを計算するサブルーチン
- ・ サブルーチン `calElasticMatrix_ortho()`  
直交異方性がある場合, 3次元問題のDマトリックスを計算するサブルーチン
- ・ サブルーチン `LinearElastic_Shell()`  
シェル要素を使用する場合, 埋め込み座標系成分のDマトリックスを計算するサブルーチン

# [lib/physics/ElasticLinear.f90]

## m\_ElasticLinear :: calElasticMatrix() の内容

サブルーチン名: `calElasticMatrix()`

3次元問題, 平面ひずみ問題, 平面応力問題, 軸対称問題のDマトリックスを  
計算するサブルーチン

### 引数

- ・構造体(tMaterial) `matl`  
材料に関連するデータ
- ・整数型 `sectType`  
問題の種類 (3次元問題/平面ひずみ/平面応力問題/軸対称問題)
- ・実数型 `D(:, :)`  
Dマトリックスの成分
- ・実数型 `temp` (省略可能)  
温度

### 上位

- ・サブルーチン [lib/physics/calMatMatrix.f90] `m_MatMatrix::MatlMatrix()`
- ・サブルーチン [lib/physics/creep.f90] `m_Creep::iso_creep()`
- ・サブルーチン [lib/physics/Elastoplastic.f90] `m_ElastoPlastic::calElastoPlasticMatrix()`
- ・サブルーチン [lib/physics/Viscoelastic.f90] `m_ViscoElastic::calViscoelasticMatrix()`

### 下位

- ・サブルーチン [lib/utilities/ttalbe.f90] `m_table::fetch_TableData()`

# [lib/static\_LIB\_3d.f90]の内容 (1/2)

モジュール名 : m\_static\_LIB\_3d

3次元要素の場合, Bマトリックスおよび

要素剛性マトリックスを計算したり, Gauss積分点における応力とひずみを計算したりするモジュール

## 使用する他のモジュール

- ・ `[lib/element/element.f90]` `elementInfo`  
要素の情報を管理するモジュール
- ・ `[lib/physics/mechgauss.f90]` `mMechGauss`  
Gauss積分点の情報を管理するモジュール
- ・ `[lib/physics/calMatMatrix.f90]` `m_MatMatrix`  
各材料のDマトリックスを計算するサブルーチンと呼ぶモジュール
- ・ `[lib/m_common_struct.f90]` `m_common_struct`  
有限要素解析における共通データを定義するモジュール
- ・ `[lib/m_fstr.f90]` `m_fstr`  
FrontISTRにおける共通データを定義するモジュール
- ・ `[lib/physics/material.f90]` `mMaterial`  
材料物性の情報を管理するモジュール
- ・ `[lib/utilities/utilities.f90]` `m_utilities`  
補助的なサブルーチンや関数を集めたモジュール
- ・ `[lib/physics/Elastoplastic.f90]` `m_ElastoPlastic`  
弾塑性体のDマトリックスを計算するモジュール

## メンバ変数

- ・ 整数型 `kint`  
整数型の種別値
- ・ 実数型 `kreal`  
実数型の種別値

## メンバ関数

## [lib/static\_LIB\_3d.f90]の内容 (2/2)

モジュール名 : m\_static\_LIB\_3d

3次元要素の場合, Bマトリックスおよび

要素剛性マトリックスを計算したり, Gauss積分点における応力とひずみを計算したりするモジュール

### メンバ関数

- ・サブルーチン **GEOMAT\_C3()**  
3次元要素の場合, 接線係数を変換するサブルーチン
- ・サブルーチン **STF\_C3()**  
3次元要素の場合, Gauss積分点における応力とひずみを計算するサブルーチン
- ・サブルーチン **DL\_C3()**  
3次元要素の場合, 分布荷重を計算するサブルーチン
- ・サブルーチン **TLOAD\_C3()**  
3次元要素の場合, 熱荷重を計算するサブルーチン
- ・サブルーチン **UPDATE\_C3()**  
3次元要素の場合, Gauss積分点での応力やひずみ, 節点での内力や反力を計算するサブルーチン
- ・サブルーチン **UpdataST\_C3()**  
3次元要素の場合, Gauss積分点での応力やひずみを計算するサブルーチン
- ・サブルーチン **NodalStress\_C3()**  
3次元要素の場合, Gauss積分点での応力やひずみから節点平均値を計算するサブルーチン
- ・サブルーチン **ElementStress\_C3()**  
3次元要素の場合, Gauss積分点での応力やひずみから要素平均値を計算するサブルーチン
- ・関数 **VOLUME\_C3()**  
3次元要素の場合, 体積を計算するサブルーチン

# [lib/static\_LIB\_3d.f90]

## m\_static\_LIB\_3d::UPDATE\_C3()の内容 (1/2)

サブルーチン名: UPDATE\_C3 ()

3次元要素の場合, Gauss積分点での応力やひずみ, 節点での内力や反力を計算するサブルーチン

### 引数

- ・整数型 etype  
要素タイプ
- ・整数型 nn  
各要素の節点数
- ・実数型 ecoord(3, nn)  
各要素の節点座標
- ・実数型 u(3, nn)  
各要素の節点変位
- ・実数型 ddu(3, nn)  
各要素の節点変位増分 (m\_fstr\_Update::fstr\_UpdateNewton()ではdu)
- ・実数型 coords(3, 3)  
材料の局所座標系を定義するのに必要な変数
- ・実数型 qf(nn\*3)  
各要素の節点内力の寄与
- ・構造体(tGaussStatus) gauss(:)  
Gaussの積分点に関連するデータ
- ・整数型 iter  
Newton-Raphson反復数
- ・実数型 tincr  
時間増分
- ・実数型 TT(nn) 省略可能  
各要素の節点温度
- ・実数型 T0(nn) 省略可能  
各要素の節点参照温度
- ・実数型 TN(nn) 省略可能  
時刻 $t$ での各要素の節点温度

上位

# [lib/static\_LIB\_3d.f90]

## m\_static\_LIB\_3d::UPDATE\_C3()の内容 (2/2)

サブルーチン名: UPDATE\_C3 ()

3次元要素の場合, Gauss積分点での応力やひずみ, 節点での内力や反力を計算するサブルーチン

上位

・サブルーチン [analysis/static/fstr Update.f90] m\_fstr\_Update::fstr\_UpdateNewton()

下位

- ・サブルーチン [lib/utilities/ttable.f90] m\_table::fetch\_TableData()
- ・サブルーチン [lib/element/element.f90] elementInfo::getQuadPoint()
- ・サブルーチン [lib/element/element.f90] elementInfo::getGlobalDeriv()
- ・サブルーチン [lib/m\_common\_struct.f90] m\_common\_struct::set\_localcoordsys()
- ・サブルーチン [lib/element/element.f90] elementInfo::getShapeFunc()
- ・サブルーチン [lib/physics/calMatMatrix.f90] m\_MatMatrix::MatlMatrix()
- ・サブルーチン [lib/utilities/utilities.f90] m\_utilities::transformation()
- ・サブルーチン [lib/physics/calMatMatrix.f90] m\_MatMatrix::StressUpdate()
- ・サブルーチン [lib/physics/Elastoplastic.f90] m\_ElastoPlastic::BackwardEuler()

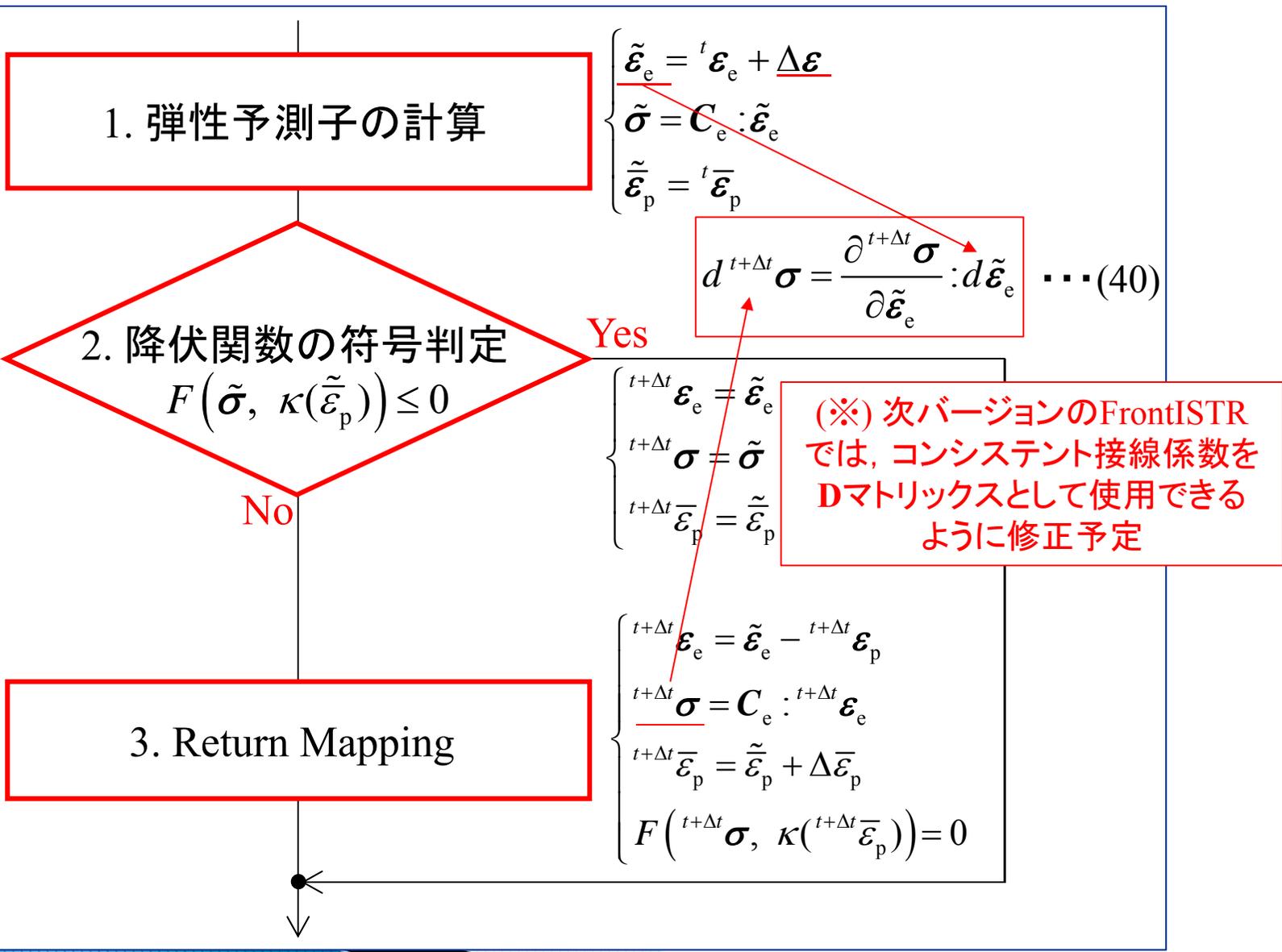
# FrontISTRによる弾塑性解析の理論とプログラムの解説 (時間積分アルゴリズムを中心に)

## 目次

1. 現バージョンのFrontISTRによる弾塑性解析の時間積分アルゴリズム
  - ・ 理論
  - ・ 現バージョンのプログラム
2. 次バージョンで修正予定の時間積分アルゴリズム  
(コンシステント接線剛性の導入)
  - ・ 理論
  - ・ 次バージョンで修正予定のプログラム
3. 解析事例

# コンシステント接線係数

時間積分アルゴリズムに**整合した**弾塑性係数が必要になります



# コンシステント接線係数: von Misesの降伏関数の場合 (1/3)

$$\begin{aligned}
 {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C}_e : {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}_e \\
 &= {}^{t+\Delta t}p\mathbf{I} + {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}' \\
 &= {}^{t+\Delta t}p\mathbf{I} + \left(1 - \frac{\Delta\gamma 3\mu}{\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}}\right)\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' \\
 &= \tilde{p}\mathbf{I} + \left(1 - \frac{\Delta\gamma 3\mu}{\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}}\right)2\mu\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e \\
 &= \tilde{p}\mathbf{I} + 2\mu\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e - \frac{\Delta\gamma 6\mu^2}{\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e \\
 &= \mathbf{C}_e : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - \frac{\Delta\gamma 6\mu^2}{\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}}\mathbf{I}_d : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \\
 &= \left(\mathbf{C}_e - \frac{\Delta\gamma 6\mu^2}{\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}}\mathbf{I}_d\right) : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \quad \dots (70)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e &= \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - \frac{1}{3}(\text{tr}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e)\mathbf{I} \\
 &= \mathbf{I} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \cdot \mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \\
 &= \delta_{ik}\delta_{jl}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e)_{kl} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \\
 &= (\delta_{ik}\delta_{jl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \\
 &= \left\{ (\delta_{ik}\delta_{jl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right\} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \\
 &= \mathbf{I}_d : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \quad \dots (71)
 \end{aligned}$$

# コンシステント接線係数: von Misesの降伏関数の場合 (2/3)

式 (41) より

$$d^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = \left( \mathbf{C}_e - \frac{\Delta\gamma 6\mu^2}{\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}} \mathbf{I}_d \right) : d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e - \frac{d\Delta\gamma 6\mu^2}{\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e + \frac{\Delta\gamma 6\mu^2}{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})} d\left(\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}\right) \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e \quad \dots (72)$$

$$df = d\left(\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}\right) + (-3\mu - H)d\Delta\gamma = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore d\Delta\gamma &= \frac{d\left(\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}\right)}{3\mu + H} \\ &= \frac{2\mu}{3\mu + H} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}} : d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e \\ &= \frac{2\mu}{3\mu + H} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}} : d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e \quad \dots (73) \end{aligned}$$

$$H = \left. \frac{d\sigma_Y}{d\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_p} \right|_{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_p + \Delta\gamma}$$

$$d\left(\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}\right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}} 3J_2'(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}} 3I_2'(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}')$$

$$= \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}} (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' : d\tilde{\boldsymbol{\sigma}}')$$

$$= \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}} (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' : d\tilde{\boldsymbol{\sigma}}')$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}} : d\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'$$

$$= 2\mu \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}} : d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e$$

$$= 2\mu \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}} : d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e \quad \dots (74)$$

# コンシステント接線係数: von Misesの降伏関数の場合 (3/3)

式 (43) より

$$\begin{aligned}
 d^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} &= \left( \mathbf{C}_e - \frac{\Delta\gamma 6\mu^2}{\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})} } \mathbf{I}_d \right) : d \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e - \frac{d\Delta\gamma 6\mu^2}{\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})} } \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e + \frac{\Delta\gamma 6\mu^2}{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})} d \left( \sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})} \right) \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e \\
 &= \left( \mathbf{C}_e - \frac{\Delta\gamma 6\mu^2}{\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})} } \mathbf{I}_d \right) : d \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e - \frac{6\mu^2}{\sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}} \frac{2\mu}{3\mu+H} \sqrt{\frac{3}{2}} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}} : d \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e + \frac{\Delta\gamma 6\mu^2}{\frac{3}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}'} 2\mu \sqrt{\frac{3}{2}} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}} : d \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e \\
 &= \left( \mathbf{C}_e - \frac{\Delta\gamma 6\mu^2}{\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})} } \mathbf{I}_d \right) : d \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e \\
 &\quad - \frac{6\mu^2}{2\mu \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}} \frac{2\mu}{3\mu+H} \sqrt{\frac{3}{2}} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}} : d \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e \\
 &\quad + \frac{\Delta\gamma 6\mu^2}{4\mu^2 \frac{3}{2} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e} 2\mu \sqrt{\frac{3}{2}} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}} : d \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e \\
 &= (\kappa \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) : d \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e + \left( 1 - \frac{\Delta\gamma 6\mu^2}{\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})} } \right) \mathbf{I}_d : d \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e \\
 &\quad + 6\mu^2 \left( \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})} } - \frac{1}{3\mu+H} \right) \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}} \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}} : d \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e \\
 &= \left\{ \kappa \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \left( 1 - \frac{\Delta\gamma 3\mu}{\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})} } \right) \mathbf{I}_d + 6\mu^2 \left( \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{3J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})} } - \frac{1}{3\mu+H} \right) \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}} \otimes \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}} \right\} : d \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e \quad \dots (76)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{3} (\text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{I} \\
 &= \mathbf{I} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\
 &= \delta_{ik} \delta_{jl} (\tilde{\boldsymbol{\sigma}})_{kl} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\
 &= (\delta_{ik} \delta_{jl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\
 &= \left\{ (\delta_{ik} \delta_{jl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right\} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\
 &= \mathbf{I}_d : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad \dots (75)
 \end{aligned}$$

# コンシステント接線係数: Drucker-Pragerの降伏関数の場合 (1/5)

(1) Drucker-Pragerの円錐の滑らかな面で降伏する場合

$$\begin{aligned}
 {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}' &= \left(1 - \frac{\Delta\gamma \mu}{\sqrt{J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})}}\right) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' \\
 &= \left(1 - \frac{\Delta\gamma \mu}{\sqrt{\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}}\right) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' \\
 &= 2\mu \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}}\right) \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e \quad \dots (77)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}' &= 2\mu \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}}\right) d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e + \left(\frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e)^{-3/2}(d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e)\right) \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e + \left(-\frac{d\Delta\gamma}{\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}}\right) \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e \right\} \\
 &= 2\mu \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}}\right) d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e + \left(\frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e)^{-3/2}(d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e)\right) \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e + \left(-\frac{d\Delta\gamma}{\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}}\right) \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e \right\} \\
 &= 2\mu \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}}\right) d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e + \left(\frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}}d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}}\right) \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}} - \frac{1}{\sqrt{2}}d\Delta\gamma \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}} \right\} \\
 &= 2\mu \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}}\right) d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e + \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}} \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}} \otimes \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}} : d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e - \frac{1}{\sqrt{2}}d\Delta\gamma \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}'_e}} \right\} \quad \dots (78)
 \end{aligned}$$

## コンシステント接線係数 : Drucker-Pragerの降伏関数の場合 (2/5)

$$\begin{aligned}
 {}^{t+\Delta t} p &= \tilde{p} - \Delta\gamma K \eta(\phi) \\
 &= K \operatorname{tr} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - \Delta\gamma K \eta(\phi) \\
 &= K ( \operatorname{tr} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - \eta(\phi) \Delta\gamma ) \quad \dots (79)
 \end{aligned}$$

$$d {}^{t+\Delta t} p = K ( \operatorname{tr} d \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - \eta(\phi) d \Delta\gamma ) \quad \dots (80)$$

$$\begin{aligned}
 dF({}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}, {}^{t+\Delta t} \kappa) &= d \left( \sqrt{J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})} \right) - \mu d \Delta\gamma + \eta(\phi) d {}^{t+\Delta t} p - dc({}^t \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \xi(\phi) \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2}} d \left( \sqrt{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}'} \right) - \mu d \Delta\gamma + \eta(\phi) K ( \operatorname{tr} d \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - \eta(\phi) d \Delta\gamma ) - \frac{dc}{d \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p} \Big|_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = {}^t \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \Delta\gamma \xi(\phi)} \xi^2(\phi) d \Delta\gamma \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}} : d {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}' - \mu d \Delta\gamma + \eta(\phi) K ( \operatorname{tr} d \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - \eta(\phi) d \Delta\gamma ) - H \Big|_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = {}^t \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \Delta\gamma \xi(\phi)} \xi^2(\phi) d \Delta\gamma \\
 &= \sqrt{2} \mu \frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e}} : d \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e + K \eta(\phi) \operatorname{tr} d \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - \left( \mu + K \eta(\phi) \eta(\phi) + \xi^2(\phi) H \Big|_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = {}^t \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \Delta\gamma \xi(\phi)} \right) d \Delta\gamma = 0 \\
 &\quad \dots (81)
 \end{aligned}$$

$$d \Delta\gamma = \frac{\sqrt{2} \mu \frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e}} : d \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e + K \eta(\phi) \operatorname{tr} d \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e}{\mu + K \eta(\phi) \eta(\phi) + \xi^2(\phi) H \Big|_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = {}^t \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \Delta\gamma \xi(\phi)}} \quad \dots (82)$$

# コンシステント接線係数: Drucker-Pragerの降伏関数の場合 (3/5)

$$\begin{aligned}
 d^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} &= d^{t+\Delta t} p \mathbf{I} + d^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}' \\
 &= K (\operatorname{tr} d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e - \eta(\psi) d\Delta\gamma) \mathbf{I} + 2\mu \left\{ \left( 1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}} \right) d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' + \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}} \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}} \otimes \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}} : d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' - \frac{1}{\sqrt{2}} d\Delta\gamma \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}} \right\} \\
 &= K \left\{ \operatorname{tr} d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e - \eta(\psi) A \left( \sqrt{2}\mu \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}} : d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' + K \eta(\phi) \operatorname{tr} d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e \right) \right\} \mathbf{I} \\
 &\quad + 2\mu \left\{ \left( 1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}} \right) d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' + \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}} \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}} \otimes \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}} : d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' - \frac{1}{\sqrt{2}} A \left( \sqrt{2}\mu \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}} : d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' + K \eta(\phi) \operatorname{tr} d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e \right) \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}} \right\} \\
 &= K \left\{ \mathbf{I} : d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e - \eta(\psi) A \left( \sqrt{2}\mu \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}} : \mathbf{I}_d : d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e + K \eta(\phi) \mathbf{I} : d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e \right) \right\} \mathbf{I} \\
 &\quad + 2\mu \left\{ \left( 1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}} \right) \mathbf{I}_d : d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e + \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}} \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}} \otimes \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}} : \mathbf{I}_d : d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e - \frac{1}{\sqrt{2}} A \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}} \left( \sqrt{2}\mu \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}} : \mathbf{I}_d : d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e + K \eta(\phi) \mathbf{I} : d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e \right) \right\} \\
 &\quad \dots (83)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d\Delta\gamma &= \frac{\sqrt{2}\mu \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}} : d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' + K \eta(\phi) \operatorname{tr} d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e}{\mu + K \eta(\phi) \eta(\psi) + \xi^2(\phi) H \Big|_{\bar{\epsilon}_p = \bar{\epsilon}_p + \Delta\gamma \xi(\phi)}} \\
 &= A \left( \sqrt{2}\mu \frac{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e'}} : d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' + K \eta(\phi) \operatorname{tr} d\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e \right) \\
 &\quad \dots (84)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' &= \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e) \mathbf{I} \\
 &= \mathbf{I} \cdot \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e \cdot \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e \\
 &= \delta_{ik} \delta_{jl} (\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e)_{kl} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e \\
 &= (\delta_{ik} \delta_{jl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e \\
 &= \left\{ (\delta_{ik} \delta_{jl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right\} : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e \\
 &= \mathbf{I}_d : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e \quad \dots (85)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_d : \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' &= \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e') \mathbf{I} \\
 &= \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_e' \quad \dots (86)
 \end{aligned}$$

## コンシステント接線係数 : Drucker-Pragerの降伏関数の場合 (4/5)

$$\begin{aligned}
 d^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} &= \left\{ 2\mu \left( 1 - \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e}} \right) \mathbf{I}_d + 2\mu \left( \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{2} \sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e}} - \mu A \right) \frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e}} \otimes \frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e}} \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{2} \mu A K \left( \eta(\phi) \frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e}} \otimes \mathbf{I} + \eta(\psi) \mathbf{I} \otimes \frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e}} \right) + K (1 - K \eta(\phi) \eta(\psi) A) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right\} : d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \\
 &= \left\{ 2\mu \mathbf{I}_d + 2\mu (-\mu A) \frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e}} \otimes \frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e}} \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{2} \mu A K \left( \eta(\phi) \frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e}} \otimes \mathbf{I} + \eta(\psi) \mathbf{I} \otimes \frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_e}} \right) + K (1 - K \eta(\phi) \eta(\psi) A) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right\} : d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \\
 &\quad \dots (87)
 \end{aligned}$$

# コンシステント接線係数 : Drucker-Pragerの降伏関数の場合 (5/5)

(2) Drucker-Pragerの円錐の頂点で降伏する場合

$$\begin{aligned}
 d^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} &= d^{t+\Delta t} p \mathbf{I} \\
 &= K \operatorname{tr} d^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_e \mathbf{I} \\
 &= K (\operatorname{tr} d \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - \operatorname{tr} d \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \mathbf{I} \\
 &= (K \mathbf{I} : d \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - K \operatorname{tr} d \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \mathbf{I} \\
 &= (K \mathbf{I} : d \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - K \operatorname{tr} d \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p) \mathbf{I} \\
 &= \left[ K \left\{ 1 - \frac{K}{K + \frac{\xi(\phi)}{\eta(\phi)} \frac{\xi(\phi)}{\eta(\phi)} H \Big|_{\bar{\varepsilon}_p = {}^t \bar{\varepsilon}_p + \frac{\xi(\phi)}{\eta(\phi)} \operatorname{tr} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p} \right\} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] : d \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \\
 &\quad \dots (88)
 \end{aligned}$$

$$dc \left( {}^t \bar{\varepsilon}_p + \frac{\xi(\phi)}{\eta(\phi)} \operatorname{tr} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p \right) \frac{\xi(\phi)}{\eta(\phi)} - d\bar{p} + K \operatorname{tr} d \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p = 0$$

$$\frac{dc}{d\bar{\varepsilon}_p} \Big|_{\bar{\varepsilon}_p = {}^t \bar{\varepsilon}_p + \frac{\xi(\phi)}{\eta(\phi)} \operatorname{tr} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p} \frac{\xi(\phi)}{\eta(\phi)} \frac{\xi(\phi)}{\eta(\phi)} \operatorname{tr} d \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p$$

$$-K \mathbf{I} : d \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + K \mathbf{I} : d \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p = 0$$

$$H \Big|_{\bar{\varepsilon}_p = {}^t \bar{\varepsilon}_p + \frac{\xi(\phi)}{\eta(\phi)} \operatorname{tr} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p} \frac{\xi(\phi)}{\eta(\phi)} \frac{\xi(\phi)}{\eta(\phi)} \operatorname{tr} d \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p$$

$$-K \mathbf{I} : d \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + K \operatorname{tr} d \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p = 0$$

$$\therefore \operatorname{tr} d \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p = \frac{K}{K + \frac{\xi(\phi)}{\eta(\phi)} \frac{\xi(\phi)}{\eta(\phi)} H \Big|_{\bar{\varepsilon}_p = {}^t \bar{\varepsilon}_p + \frac{\xi(\phi)}{\eta(\phi)} \operatorname{tr} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p}} \mathbf{I} : d \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$$

... (89)

# FrontISTRによる弾塑性解析の理論とプログラムの解説 (時間積分アルゴリズムを中心に)

## 目次

1. 現バージョンのFrontISTRによる弾塑性解析の時間積分アルゴリズム
  - ・ 理論
  - ・ 現バージョンのプログラム
2. 次バージョンで修正予定の時間積分アルゴリズム  
(コンシステント接線剛性の導入)
  - ・ 理論
  - ・ 次バージョンで修正予定のプログラム
3. 解析事例

## 参考文献

- de Souza Neto, E.A., Peric, D. and Owen, D.J.R., 寺田賢二郎監訳, 非線形有限要素法-弾塑性解析の理論と実践, 森北出版, 2012.
- 久田俊明, 野口裕久, 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, 1996.