FrontISTRの梁要素／シェル要素の解説

東京大学
新領域創成科学研究科
人間環境学専攻
橋本　学

2016年2月2日
第25回　FrontISTR研究会
＜事例・サービスの紹介／FrontISTRの構造要素 (シェル要素／梁要素)の解説＞

この講演では

- 『FrontISTRに実装されている定式化を十分に理解し，解きたい問題に対してソースコードを自由にカスタマイズ(要素タイプを追加，材料の種類を追加，ユーザサブルーチンを追加) できるようになること』を最終目標とします

- 今回は，FrontISTRに実装されている構造要素 (Bernoulli-Euler梁要素／MITCシェル要素) を解説します
また，シェル要素／梁要素とソリッド要素を混ぜた解析メッシュを使用する場合の計算方法について解説します

FrontISTRのメッシュファイル

```
!HEADER
        conrod (2015/10/20)
!NODE, NGRP=NODE_ALL
1,   1.5947469e-2,   1.5194545e-1,   0.0000000
2,   1.6402800e-2,   1.5406281e-1,  -4.0000000e-3
3,   1.4900877e-2,   1.5004414e-1,  -4.0000000e-3
4,   1.3912825e-2,   1.4809515e-1,  -8.0000000e-3
5,   1.3486000e-2,   1.4375201e-1,   0.0000000
```

ヘッダー

節点の番号 I と

節点の座標値

(x^I, y^I, z^I)

```
96328,  -2.7018885e-2,   2.8273724e-2,   4.3311714e-3
!ELEMENT, TYPE=342, EGRP=ELEMENT_ALL
     1,11689,11690,11691,11692,69217,69204,69203,69205,69218,69228
     2,11689,11693,11694,11691,69250,69207,69206,69204,69229,69230
     3,11693,11695,11696,11689,69276,69252,69251,69206,69208,69209
     4,11697,11693,11695,11696,69251,69277,69253,69288,69252,69276
     5,11698, 1924,11699,11251,28041,69309,28040,67990,28039,67991
```

要素の番号 e と

要素内の

節点同士の

つながり

(コネクティビティ)

梁要素:TYPE=611

シェル要素:TYPE=741

TYPE=743

```
56115,  8763,11467,  3708,  2887,36677,36675,57103,33602,33605,33601
!NGROUP, NGRP=U_FIXED
1073
1074
1075
1076
1077
```

節点グループ

境界条件や集中荷重(外力)を与える

```
68380
!SECTION, TYPE=SOLID, EGRP=ELEMENT_ALL, MATERIAL=ALUMINUM
!MATERIAL, NAME=ALUMINUM, ITEM=3
!ITEM=1,SUBITEM=2
 0.0, 0.0
!ITEM=2
 0.0
!ITEM=3
 0.0
!END
```

セクションデータ

材料データ

セクションの設定によって

要素グループに材料データが

与えられる

梁要素: TYPE=BEAM

シェル要素: TYPE=SHELL

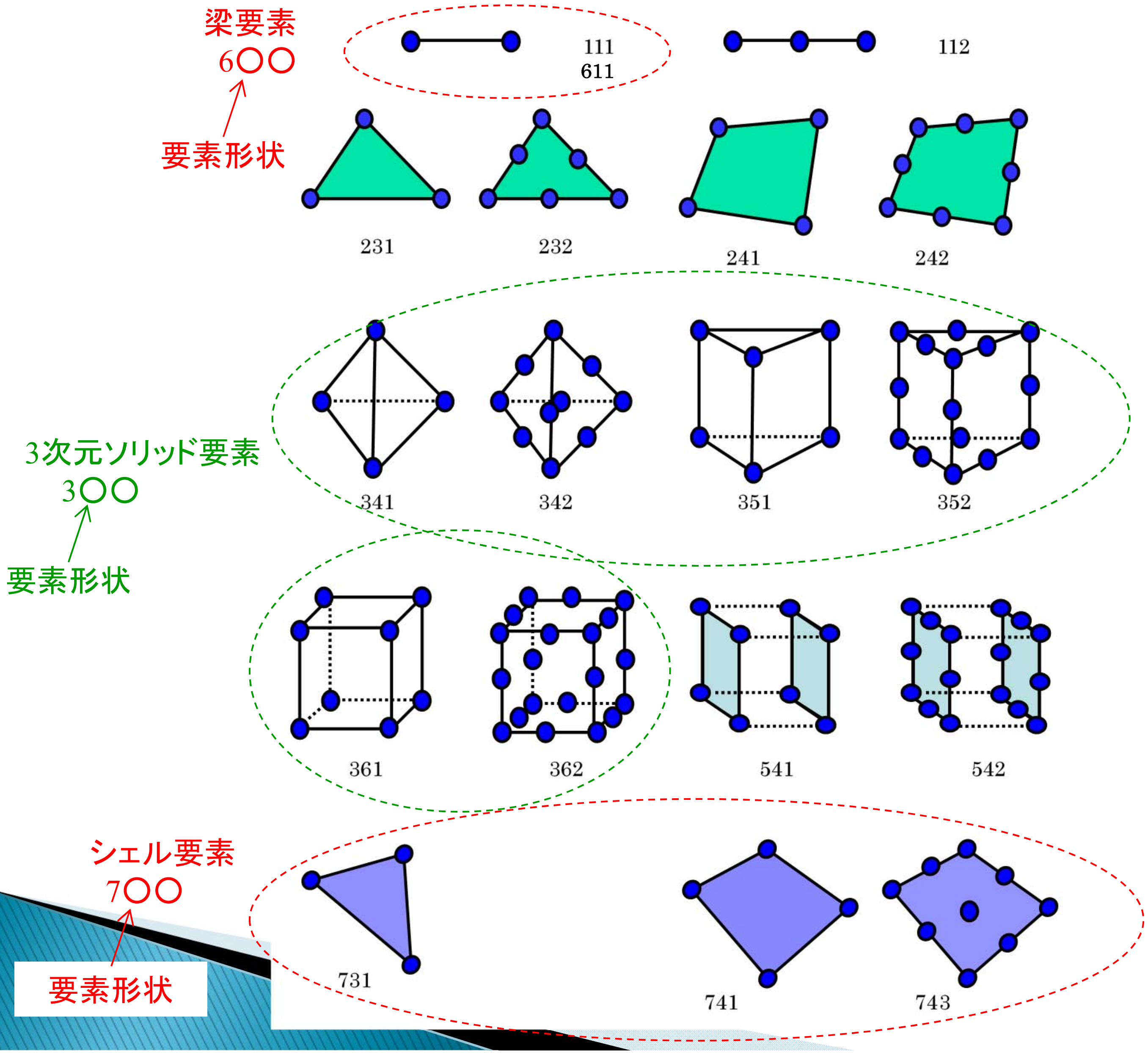
ファイルの終わり

FrontISTRで使用可能な要素タイプ (1/2)

要素種類	要素タイプ番号	節点数	節点自由度数	説明
線要素	111	2	3	2節点リンク要素
	112	3	3	3節点リンク要素
平面要素	231	3	3	三角形1次要素
	232	6	3	三角形2次要素
	241	4	3	四角形1次要素
	242	8	3	四角形2次要素 (Serendipity族)
ソリッド要素	301	2	3	2節点トラス要素
	341	4	3	四面体1次要素
	342	10	3	四面体2次要素
	351	6	3	プリズム1次要素
	352	15	3	プリズム2次要素
	361	8	3	六面体1次要素
	362	20	3	六面体2次要素 (Serendipity族)
インターフェース要素	541	4×2	3	四角形面1次要素
	542	8×2	3	四角形面2次要素
梁要素	611*	2	6	2節点梁要素 (Bernoulli-Euler梁)
	641**	2×2	3	2節点梁要素 (Bernoulli-Euler梁)
シェル要素	731*	3	6	三角形1次要素 (MITC3シェル)
	761**	3×2	3	三角形1次要素 (MITC3シェル)
	741*	4	6	四角形1次要素 (MITC4シェル)
	781**	4×2	3	四角形1次要素 (MITC4シェル)
	743	9	6	四角形2次要素 (MITC9シェル)

(注意) 解析メッシュにソリッド要素，梁要素，シェル要素が混在する場合，
節点自由度数を3に揃えるため，*ではなく**の要素タイプ番号を使用してください

FrontISTRで使用可能な要素タイプ (2/2)



解析の分類 (1/2)

- 構造解析
  - 静解析
    - 荷重増分解析不要
      !SOLUTION,TYPE=STATIC
      - 微小変形理論 (線形弾性体のみ)
    - 荷重増分解析要
      !SOLUTION,TYPE=NLSTATIC
      - 微小変形理論
        材料定義においてINIFINITEを追記
        例:!ELASTIC, INFINITE
      - 有限変形理論
  - 動解析
    - 直接時間積分
      !SOLUTION,TYPE=DYNAMIC
      !DYNAMIC下のidx_respを1に設定
      - 微小変形理論 (線形弾性体のみ)
        !DYNAMIC,TYPE=LINEAR
      - 有限変形理論
        !DYNAMIC,TYPE=NONLINEAR
    - 固有値解析
      !SOLUTION,TYPE=EIGEN
    - 周波数応答解析
      !SOLUTION,TYPE=DYNAMIC
      !DYNAMIC下のidx_respを2に設定
- 熱伝導解析
  !SOLUTION,TYPE=HEAT
  - 定常解析
    !HEATの下に記述無または0.0と記述
  - 非定常解析

解析の分類 (2/2)

- 微小変形理論 (微小変位)
  - 微小ひずみ
    - 線形弾性体　!ELASTIC
    - 弾塑性体　!ELASTICと!PLASTIC
    - 粘弾性体　!ELASTICと!VISCOELASTIC
    - クリープ材　!ELASTICと!CREEP
- 有限変形理論 (有限変位)
  - 微小ひずみ
    - 線形弾性体　!ELASTIC
    - 弾塑性体　!ELASTICと!PLASTIC
    - 粘弾性体　!ELASTICと!VISCOELASTIC
    - クリープ材　!ELASTICと!CREEP
  - 大ひずみ
    - 弾塑性体
    - 超弾性体　!HYPERELASTIC
    - 粘弾性体
    - クリープ材

青字はFrontISTRで解析可能な材料

有限変形理論

$$
{}_0^t\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left\{ ({}^0\nabla\otimes{}^t\boldsymbol{u}) + ({}^0\nabla\otimes{}^t\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} + ({}^0\nabla\otimes{}^t\boldsymbol{u})\cdot({}^0\nabla\otimes{}^t\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \right\}
$$

ひずみ　　変位こう配の2次項がある

大ひずみ

$$
{}_0^t\boldsymbol{S} = f({}_0^t\boldsymbol{E},\ {}_0^t\boldsymbol{E}\cdot{}_0^t\boldsymbol{E},\ \ldots)
$$

応力　ひずみの2次以上の項がある

記号の説明

t	時刻 [s]
N	次元 (3次元 : $N = 3$)
Ω	有界領域 [m^N]
Γ	境界 [m^{N-1}]
$\boldsymbol{x}$	物質点の位置ベクトル [m]
∇	ナブラ [1/m]
$\boldsymbol{u}$	変位 [m]
$\boldsymbol{t}$	トラクション [Pa]
$\boldsymbol{b}$	単位質量当たりの体積力 [N/kg]
ρ	密度 [kg/m^3]
$\boldsymbol{n}$	外向き単位法線ベクトル [-]

時刻 t の物理量

$$ {}^t_0\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left\{ ({}^0\nabla \otimes {}^t\boldsymbol{u}) + ({}^0\nabla \otimes {}^t\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} + ({}^0\nabla \otimes {}^t\boldsymbol{u}) \cdot ({}^0\nabla \otimes {}^t\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \right\} $$

基準となる時刻が時刻0の意味

$a,\ b$	スカラー
$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$	ベクトル
$\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$	2階のテンソル

$$ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_i b_i $$

$$ \boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = A_{ij} B_{ij} $$

FrontISTRの梁要素／シェル要素の解説

目次

FrontISTRの梁要素／シェル要素の解説

目次

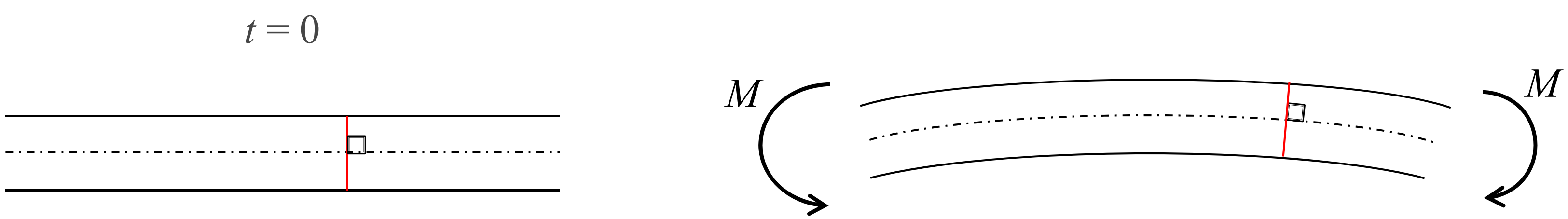
１．FrontISTRにおけるBernoulli-Euler梁要素／MITCシェル要素を用いた解析
- 理論
- 現バージョンのプログラム
- 解析事例

２．シェル要素／梁要素とソリッド要素を混ぜた解析
- 理論
- 現バージョンのプログラム
- 解析事例

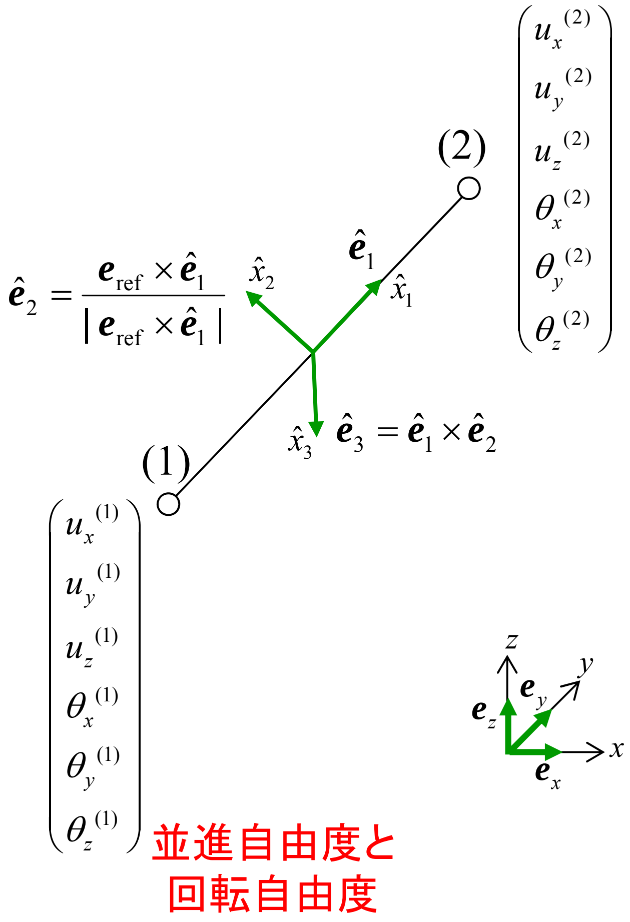
FrontISTRの梁要素の仮定

(a) 時刻 $t = 0$に梁の中立軸に垂直な直線は梁が変形する間も直線であるが，変形した中立軸に垂直である
(せん断変形は考慮されない)
Bernoulli-Eulerの仮定

(b) 梁の断面は変形しない
微小ひずみの仮定



2節点Bernoulli-Euler梁要素 (1/4)



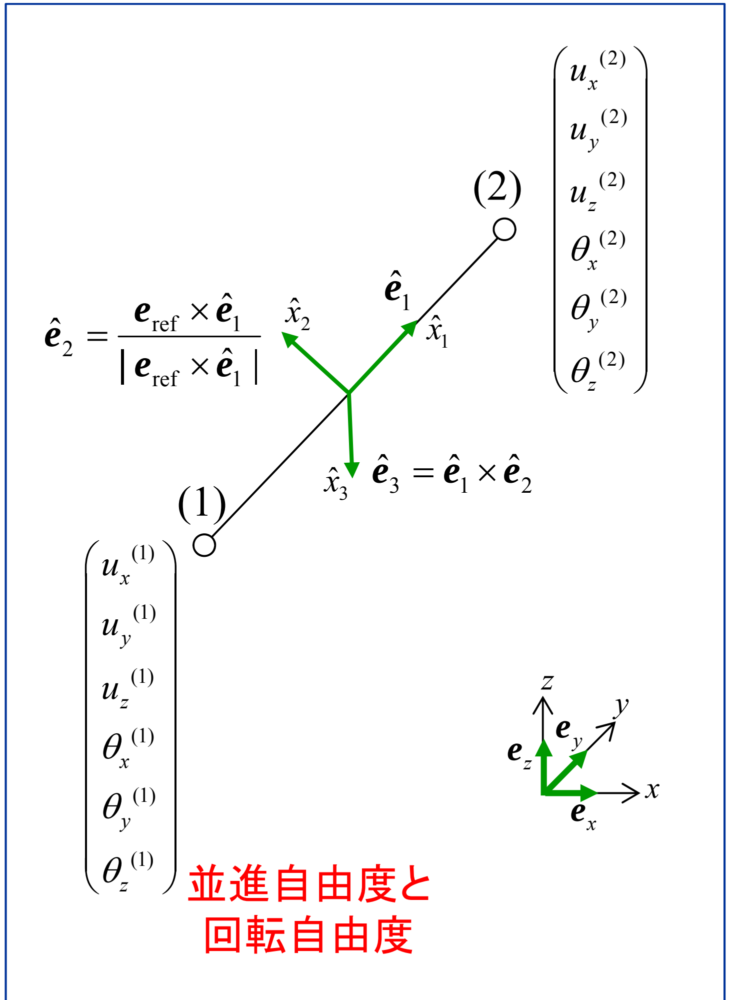
Bernoulli-Euler梁要素

微小変形を仮定

- 中立軸方向の一様引張・一様圧縮
  - $\hat{x}_1$ 方向変位：$\hat{x}_1$ の1次式を仮定
- 曲げ
  - $\hat{x}_2$ 方向変位：$\hat{x}_1$ の3次式を仮定
  - $\hat{x}_3$ 方向回転：$\hat{\theta}_3 = \dfrac{\partial \hat{u}_2}{\partial \hat{x}_1}$
  - $\hat{x}_3$ 方向変位：$\hat{x}_1$ の3次式を仮定
  - $\hat{x}_2$ 方向回転：$\hat{\theta}_2 = -\dfrac{\partial \hat{u}_3}{\partial \hat{x}_1}$
- ねじり
  - $\hat{x}_1$ 方向回転：$\hat{x}_1$ の1次式を仮定

鷲津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦共編, "有限要素法ハンドブック I 基礎編" (1981), p.218-220.

2節点Bernoulli-Euler梁要素 (2/4)



Bernoulli-Euler梁要素

変位ベクトル

$$\boldsymbol{u} = u_i \boldsymbol{e}_i = \hat{u}_i \hat{\boldsymbol{e}}_i$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{u} = (\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) u_j = T^e_{ij} u_j$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{pmatrix}}_{\text{局所座標成分}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_1 \cdot \boldsymbol{e}_x & \hat{\boldsymbol{e}}_1 \cdot \boldsymbol{e}_y & \hat{\boldsymbol{e}}_1 \cdot \boldsymbol{e}_z \\ \hat{\boldsymbol{e}}_2 \cdot \boldsymbol{e}_x & \hat{\boldsymbol{e}}_2 \cdot \boldsymbol{e}_y & \hat{\boldsymbol{e}}_2 \cdot \boldsymbol{e}_z \\ \hat{\boldsymbol{e}}_3 \cdot \boldsymbol{e}_x & \hat{\boldsymbol{e}}_3 \cdot \boldsymbol{e}_y & \hat{\boldsymbol{e}}_3 \cdot \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}^e} \underbrace{\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}}_{\text{全体座標成分}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_3 \end{pmatrix}}_{\text{局所座標成分}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_1 \cdot \boldsymbol{e}_x & \hat{\boldsymbol{e}}_1 \cdot \boldsymbol{e}_y & \hat{\boldsymbol{e}}_1 \cdot \boldsymbol{e}_z \\ \hat{\boldsymbol{e}}_2 \cdot \boldsymbol{e}_x & \hat{\boldsymbol{e}}_2 \cdot \boldsymbol{e}_y & \hat{\boldsymbol{e}}_2 \cdot \boldsymbol{e}_z \\ \hat{\boldsymbol{e}}_3 \cdot \boldsymbol{e}_x & \hat{\boldsymbol{e}}_3 \cdot \boldsymbol{e}_y & \hat{\boldsymbol{e}}_3 \cdot \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}^e} \underbrace{\begin{pmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{pmatrix}}_{\text{全体座標成分}}$$

応力テンソル

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = \hat{\sigma}_{ij} \hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_j$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j = (\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{e}_k) \sigma_{kl} (\boldsymbol{e}_l \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j) = T^e_{ik} \sigma_{kl} T^e_{jl}$$

鷲津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦共編, "有限要素法ハンドブック I 基礎編" (1981), p.218-220.

2節点Bernoulli-Euler梁要素 (3/4)

局所座標系　　$\hat{\mathbf{K}}^e\,\hat{\mathbf{u}}^e = \hat{\mathbf{f}}^e$

$$
\hat{\mathbf{K}}^e = \begin{pmatrix}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI_3}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_3}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_3}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_3}{l^2} \\
0 & 0 & \frac{12EI_2}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_2}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_2}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_2}{l^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{GJ_1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_1}{l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI_2}{l^2} & 0 & \frac{4EI_2}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_2}{l^2} & 0 & \frac{2EI_2}{l} & 0 \\
0 & \frac{6EI_3}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_3}{l} & 0 & -\frac{6EI_3}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_3}{l} \\
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI_3}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_3}{l^2} & 0 & \frac{12EI_3}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_3}{l^2} \\
0 & 0 & -\frac{12EI_2}{l^3} & 0 & \frac{6EI_2}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_2}{l^3} & 0 & \frac{6EI_2}{l^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_1}{l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI_2}{l} & 0 & \frac{2EI_2}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_2}{l^2} & 0 & \frac{4EI_2}{l} & 0 \\
0 & \frac{6EI_3}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_3}{l} & 0 & -\frac{6EI_3}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_3}{l}
\end{pmatrix}
\qquad
\hat{\mathbf{u}}^e = \begin{pmatrix}
\hat{u}_1^{(1)} \\ \hat{u}_2^{(1)} \\ \hat{u}_3^{(1)} \\ \hat{\theta}_1^{(1)} \\ \hat{\theta}_2^{(1)} \\ \hat{\theta}_3^{(1)} \\ \hat{u}_1^{(2)} \\ \hat{u}_2^{(2)} \\ \hat{u}_3^{(2)} \\ \hat{\theta}_1^{(2)} \\ \hat{\theta}_2^{(2)} \\ \hat{\theta}_3^{(2)}
\end{pmatrix}
$$

E : Young率　　l : 梁の長さ　　$I_2,\ I_3$: 断面2次モーメント　　J : ねじり定数

2節点Bernoulli-Euler梁要素 (4/4)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{T}^e & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T}^e & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{T}^e & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{T}^e \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{K}}^e \begin{pmatrix} \mathbf{T}^e & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T}^e & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{T}^e & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{T}^e \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}^e} \mathbf{u}^e = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{T}^e & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T}^e & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{T}^e & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{T}^e \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{f}}^e}_{\mathbf{f}^e}$$

全体座標系の要素剛性マトリックス $\mathbf{K}^e$ を作成後，
$\mathbf{K}^e$ を全体剛性マトリックスに加える

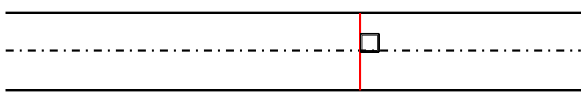
$$\mathbf{u}^e = \begin{pmatrix} u_x^{(1)} \\ u_y^{(1)} \\ u_z^{(1)} \\ \theta_x^{(1)} \\ \theta_y^{(1)} \\ \theta_z^{(1)} \\ u_x^{(2)} \\ u_y^{(2)} \\ u_z^{(2)} \\ \theta_x^{(2)} \\ \theta_y^{(2)} \\ \theta_z^{(2)} \end{pmatrix}$$

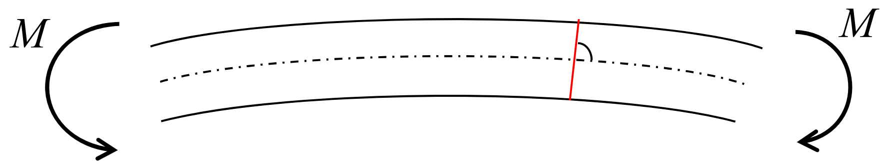
FrontISTRのシェル要素の仮定

(a) 時刻 $t = 0$にシェルの中立面に垂直な直線はシェルが変形する間も直線であるが，変形した中立面に垂直である必要はない(せん断変形は考慮される)
Reissner-Mindlin板の仮定

(b) シェルのディレクタは変形しない
微小ひずみの仮定

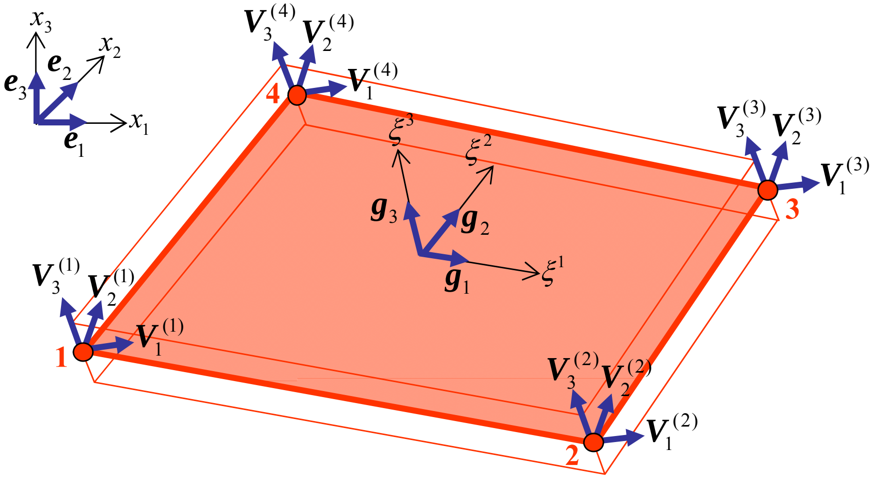
$t = 0$



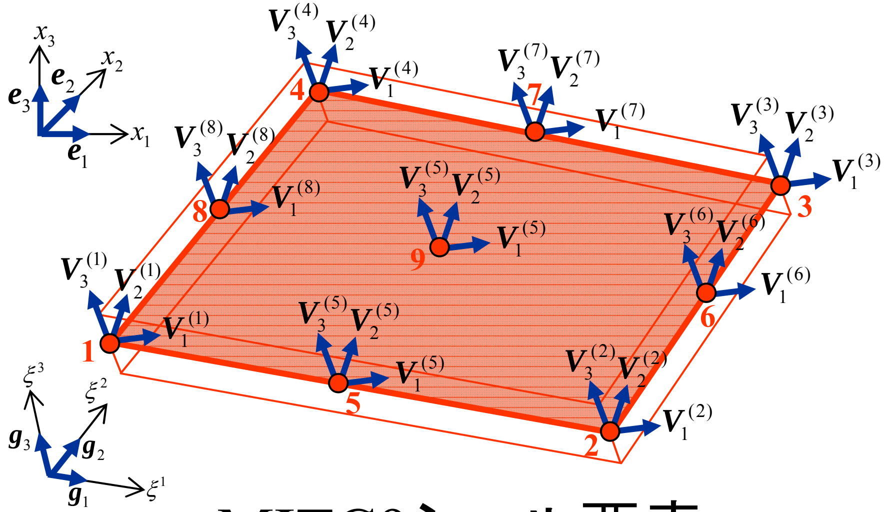


FrontISTRで使用できるシェル要素

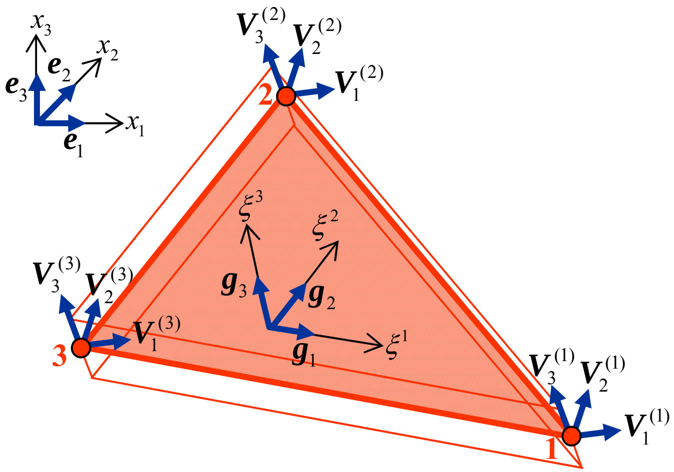
FrontISTRでは微小変形を仮定したMITCシェル要素が実装されている



MITC4シェル要素



MITC9シェル要素



MITC3シェル要素

Bathe, K.J., *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, (1995).

MITC (Mixed Interpolation of Tensorial Components) shell element

(a) Isoparametric degenerated shell element

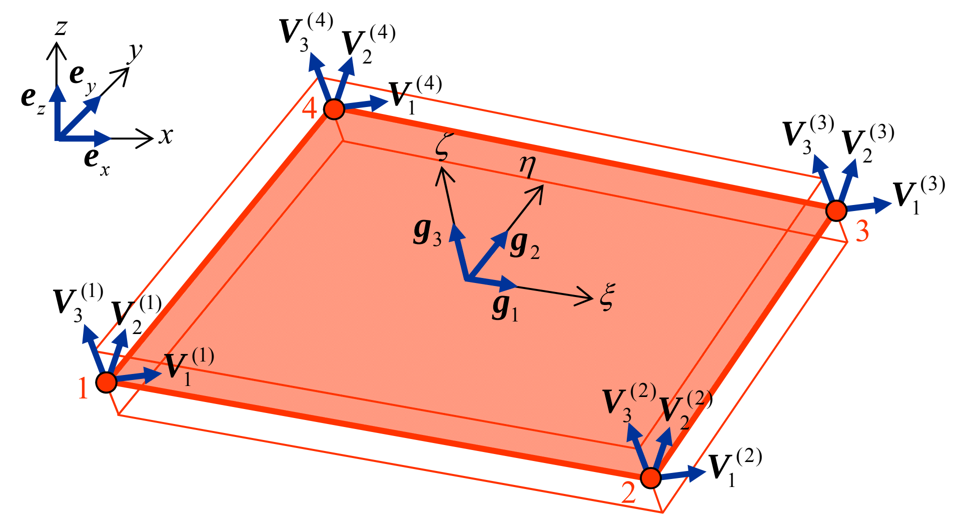
(b) The covariant components measured in the convected system are used as the Green-Lagrange strain components.

(c) The transverse shear strain components are evaluated using the values interpolated at sampling points.

Bathe, K.J., *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, (1995).

MITC4シェル要素 (1/4)

Dvorkin, E.N. and Bathe, K.J., "A Continuum Mechanics Based Four-node Shell Element for General Non-linear Analysis," *Engineering Computations*, Vol.1, pp.77-88, (1984).



a ：厚さ

$\boldsymbol{V}_1^{(\alpha)}$, $\boldsymbol{V}_2^{(\alpha)}$, $\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)}$: 節点での単位直交ベクトル

$\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)}$: ディレクタベクトル

$$\boldsymbol{g}_1=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi},\ \boldsymbol{g}_2=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \eta},\ \boldsymbol{g}_3=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \zeta}$$

: 共変基底ベクトル

$${}^0\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)}=\frac{{}^0\boldsymbol{g}_3}{|{}^0\boldsymbol{g}_3|}$$

Fig. MITC4 shell element

位置ベクトル

$$\boldsymbol{x}=\sum_{\alpha=1}^{4} N^{(\alpha)}(\xi,\eta)\left(\boldsymbol{x}^{(\alpha)}+\frac{a}{2}\zeta \boldsymbol{V}_3^{(\alpha)}\right)$$

変位ベクトル

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}-{}^0\boldsymbol{x}$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{4} N^{(\alpha)}(\xi,\eta)\left\{\boldsymbol{u}^{(\alpha)}+\frac{a}{2}\zeta\left(\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)}-{}^0\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)}\right)\right\}$$

(微小変形を仮定)

$$\boldsymbol{u}=\sum_{\alpha=1}^{4} N^{(\alpha)}(\xi,\eta)\left\{\boldsymbol{u}^{(\alpha)}+\frac{a}{2}\zeta\left(\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)}-{}^0\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)}\right)\right\}$$

$$\simeq\sum_{\alpha=1}^{4} N^{(\alpha)}(\xi,\eta)\left\{\boldsymbol{u}^{(\alpha)}+\frac{a}{2}\zeta\left(\boldsymbol{\theta}^{(\alpha)}\times {}^0\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)}\right)\right\}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}^{(\alpha)}=\underline{u_x^{(\alpha)}}\,\boldsymbol{e}_x+\underline{u_y^{(\alpha)}}\,\boldsymbol{e}_y+\underline{u_z^{(\alpha)}}\,\boldsymbol{e}_z\\ \boldsymbol{\theta}^{(\alpha)}=\underline{\psi_1^{(\alpha)}}\,\boldsymbol{V}_1^{(\alpha)}+\underline{\psi_2^{(\alpha)}}\,\boldsymbol{V}_2^{(\alpha)}\end{cases}$$

節点あたり5自由度

MITC4シェル要素 (2/4)

Dvorkin, E.N. and Bathe, K.J., “A Continuum Mechanics Based Four-node Shell Element for General Non-linear Analysis,” *Engineering Computations*, Vol.1, pp.77-88, (1984).

$$\Phi^* = \Phi + \int_V \lambda^{31}(\varepsilon_{31} - \varepsilon_{31}^{\mathrm{DI}})dV + \int_V \lambda^{23}(\varepsilon_{23} - \varepsilon_{23}^{\mathrm{DI}})dV$$

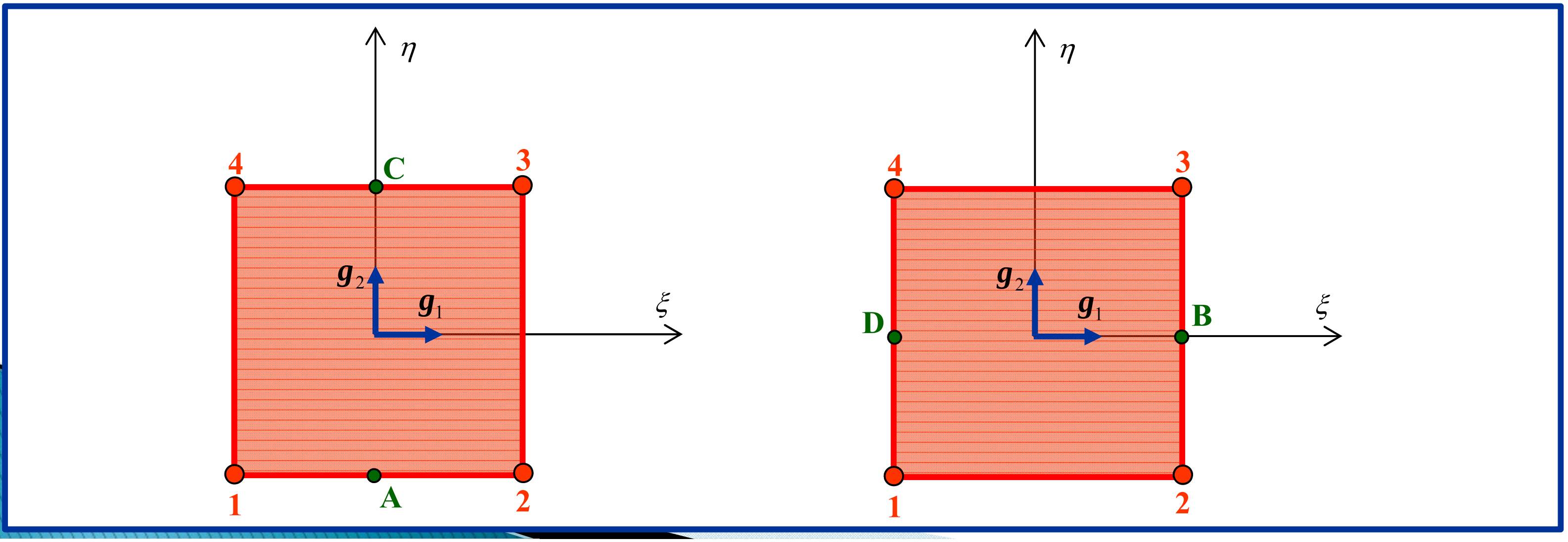
$$\Phi = \int_V \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}\ dV - \int_{S_\mathrm{t}} \boldsymbol{u}\cdot \underline{\boldsymbol{t}}\ dS - \int_V \boldsymbol{u}\cdot\rho\boldsymbol{b}\ dV$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij}\ {}^0\boldsymbol{g}_i \otimes {}^0\boldsymbol{g}_j \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}\ {}^0\boldsymbol{g}^i \otimes {}^0\boldsymbol{g}^j \end{cases}$$

Tensorial components

$$\begin{cases} \varepsilon_{31} = \varepsilon_{31}^{\mathrm{AS}} = \frac{1}{2}(1-\eta)\,\varepsilon_{31,\mathrm{A}}^{\mathrm{AS}} + \frac{1}{2}(1+\eta)\,\varepsilon_{31,\mathrm{C}}^{\mathrm{AS}} \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{23}^{\mathrm{AS}} = \frac{1}{2}(1-\xi)\,\varepsilon_{23,\mathrm{D}}^{\mathrm{AS}} + \frac{1}{2}(1+\xi)\,\varepsilon_{23,\mathrm{B}}^{\mathrm{AS}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda^{31} = \delta(\xi)\,\delta(1+\eta)\,\lambda_\mathrm{A} + \delta(\xi)\,\delta(1-\eta)\,\lambda_\mathrm{C} \\ \lambda^{23} = \delta(1+\xi)\,\delta(\eta)\,\lambda_\mathrm{D} + \delta(1-\xi)\,\delta(\eta)\,\lambda_\mathrm{B} \end{cases}$$



MITC4シェル要素 (3/4)

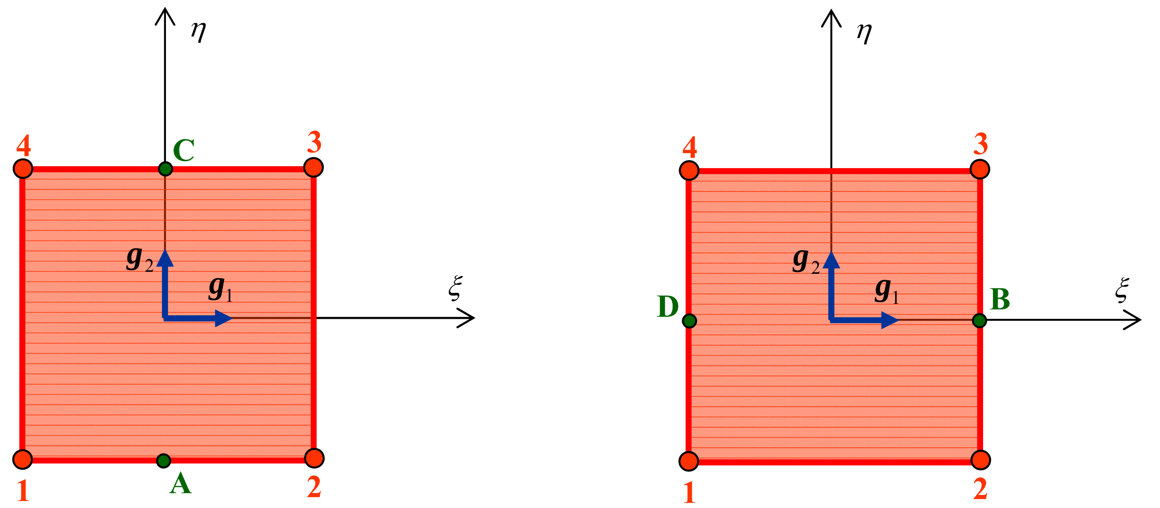
Dvorkin, E.N. and Bathe, K.J., "A Continuum Mechanics Based Four-node Shell Element for General Non-linear Analysis," *Engineering Computations*, Vol.1, pp.77-88, (1984).

$\delta\Phi^* = 0$ より，仮想仕事の原理

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV = \int_{S_t} \delta\boldsymbol{u} \cdot \underline{\boldsymbol{t}}\, dS + \int_V \delta\boldsymbol{u} \cdot \rho\boldsymbol{b}\, dV$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{31} = \varepsilon_{31}^{\mathrm{AS}} = \dfrac{1}{2}(1-\eta)\,\varepsilon_{31}^{\mathrm{DI}}(0,\,-1,\,0) + \dfrac{1}{2}(1+\eta)\,\varepsilon_{31}^{\mathrm{DI}}(0,\,1,\,0) \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{23}^{\mathrm{AS}} = \dfrac{1}{2}(1-\xi)\,\varepsilon_{23}^{\mathrm{DI}}(-1,\,0,\,0) + \dfrac{1}{2}(1+\xi)\,\varepsilon_{23}^{\mathrm{DI}}(1,\,0,\,0) \end{cases}$$

Mixed Interpolation of Tensorial Components



MITC4シェル要素 (4/4)

Dvorkin, E.N. and Bathe, K.J., “A Continuum Mechanics Based Four-node Shell Element for General Non-linear Analysis,” *Engineering Computations*, Vol.1, pp.77-88, (1984).

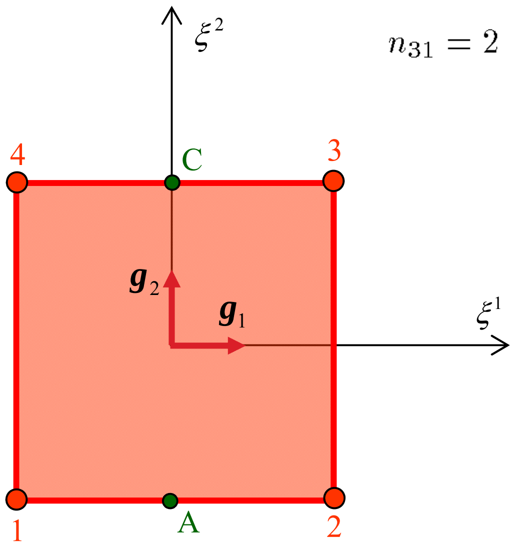
せん断ひずみ成分

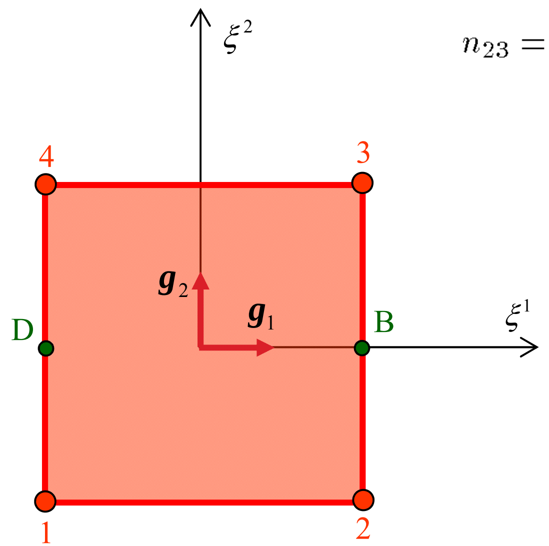
$$E_{IJ}^{\mathrm{AS}}(\xi^1,\xi^2,\xi^3)=\sum_{k=1}^{n_{IJ}} h_{(k)}^{IJ}(\xi^1,\xi^2)\,E_{IJ}^{\mathrm{DI}}(\xi_{(k)}^1,\xi_{(k)}^2,\xi^3)$$

$$E_{31}^{\mathrm{AS}}(\xi^1,\xi^2,\xi^3)=\frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)E_{31}^{\mathrm{DI}}(0,-1,0)+\frac{1}{2}\left(1+\xi^2\right)E_{31}^{\mathrm{DI}}(0,1,0)$$

$$E_{23}^{\mathrm{AS}}(\xi^1,\xi^2,\xi^3)=\frac{1}{2}\left(1-\xi^1\right)E_{23}^{\mathrm{DI}}(-1,0,0)+\frac{1}{2}\left(1+\xi^1\right)E_{23}^{\mathrm{DI}}(1,0,0)$$

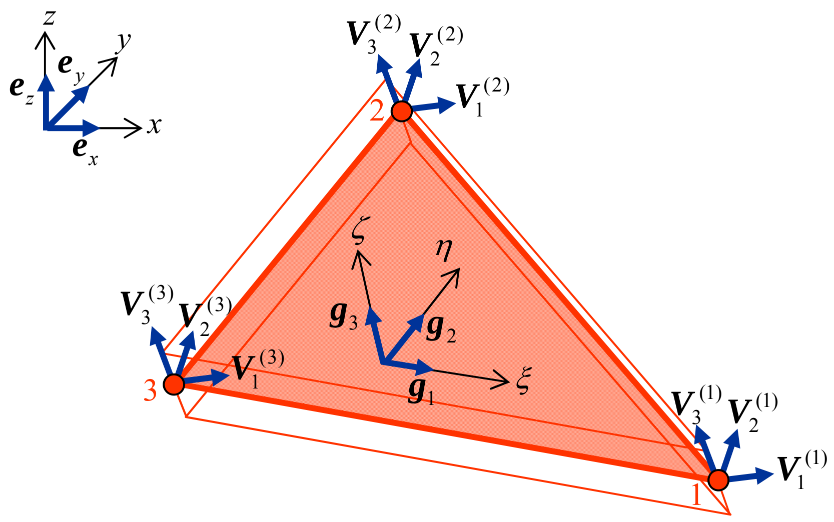
$h_{(k)}^{31}(\xi^1,\xi^2)=\left[\frac{1}{2}(1+\xi_{(k)}^2\xi^2)\right]$	$h_{(k)}^{23}(\xi^1,\xi^2)=\left[\frac{1}{2}(1+\xi_{(k)}^1\xi^1)\right]$
$\begin{cases}\{\xi_{(k)}^1\}=\{0,\ 0\}\\ \{\xi_{(k)}^2\}=\{-1,\ 1\}\end{cases}$	$\begin{cases}\{\xi_{(k)}^1\}=\{-1,\ 1\}\\ \{\xi_{(k)}^2\}=\{0,\ 0\}\end{cases}$





MITC3シェル要素 (1/2)

Lee, P.S. and Bathe, K.J., "Development of MITC Isotropic Triangular Shell Finite Elements, Computers & Structures, Vol.82, pp.945-962, (2004).



a ：厚さ

$\boldsymbol{V}_1^{(\alpha)}$, $\boldsymbol{V}_2^{(\alpha)}$, $\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)}$: 節点での単位直交ベクトル

$\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)}$: ディレクタベクトル

$$\boldsymbol{g}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi},\ \boldsymbol{g}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \eta},\ \boldsymbol{g}_3 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \zeta}$$

: 共変基底ベクトル

$${}^0\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)} = \frac{{}^0\boldsymbol{g}_3}{|{}^0\boldsymbol{g}_3|}$$

Fig. MITC4 shell element

位置ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \sum_{\alpha=1}^{3} N^{(\alpha)}(\xi, \eta)\left(\boldsymbol{x}^{(\alpha)} + \frac{a}{2}\zeta \boldsymbol{V}_3^{(\alpha)}\right)$$

変位ベクトル

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - {}^0\boldsymbol{x}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{3} N^{(\alpha)}(\xi, \eta)\left\{\boldsymbol{u}^{(\alpha)} + \frac{a}{2}\zeta\left(\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)} - {}^0\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)}\right)\right\}$$

(微小変形を仮定)

$$\boldsymbol{u} = \sum_{\alpha=1}^{3} N^{(\alpha)}(\xi, \eta)\left\{\boldsymbol{u}^{(\alpha)} + \frac{a}{2}\zeta\left(\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)} - {}^0\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)}\right)\right\}$$

$$\simeq \sum_{\alpha=1}^{3} N^{(\alpha)}(\xi, \eta)\left\{\boldsymbol{u}^{(\alpha)} + \frac{a}{2}\zeta\left(\boldsymbol{\theta}^{(\alpha)} \times {}^0\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)}\right)\right\}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}^{(\alpha)} = \underline{u_x^{(\alpha)}}\,\boldsymbol{e}_x + \underline{u_y^{(\alpha)}}\,\boldsymbol{e}_y + \underline{u_z^{(\alpha)}}\,\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{\theta}^{(\alpha)} = \underline{\psi_1^{(\alpha)}}\,\boldsymbol{V}_1^{(\alpha)} + \underline{\psi_2^{(\alpha)}}\,\boldsymbol{V}_2^{(\alpha)} \end{cases}$$

節点あたり5自由度

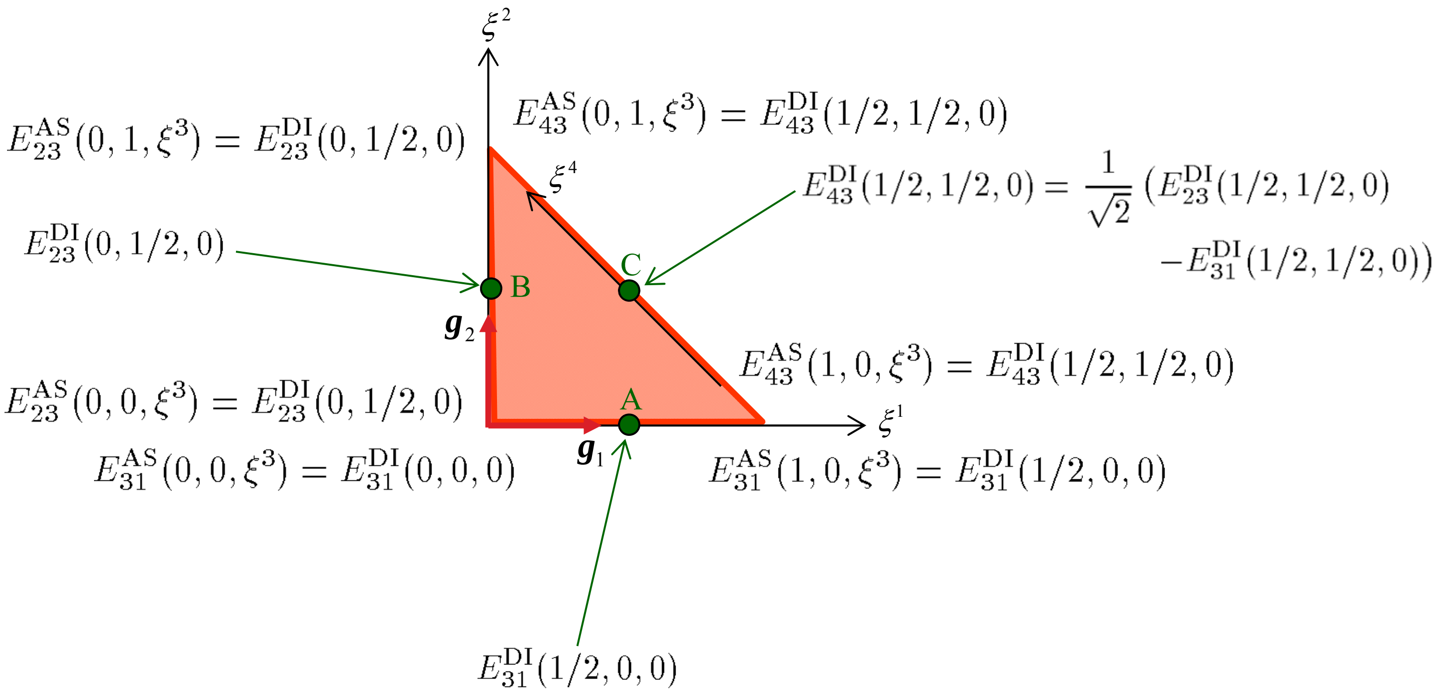
MITC3シェル要素 (2/2)

Lee, P.S. and Bathe, K.J., "Development of MITC Isotropic Triangular Shell Finite Elements, Computers & Structures, Vol.82, pp.945-962, (2004).

せん断ひずみ成分

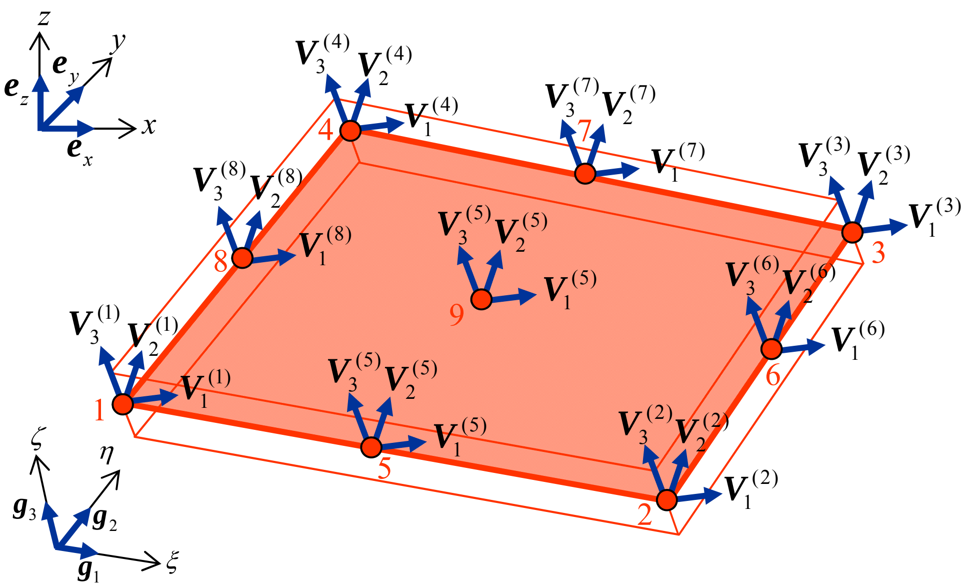
$$E_{23}^{\mathrm{AS}}(\xi^1,\xi^2,\xi^3) = E_{23}^{\mathrm{DI}}(0,1/2,0) + c_2\,\xi^1$$

$$E_{31}^{\mathrm{AS}}(\xi^1,\xi^2,\xi^3) = E_{31}^{\mathrm{DI}}(1/2,0,0) + c_1\,\xi^2$$



MITC9シェル要素 (1/2)

Bucalem, M.L. and Bathe, K.J., “Higher-order MITC general shell element,” International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.36, pp.3729-3754, (1993).



a ：厚さ

$\boldsymbol{V}_1^{(\alpha)}$，$\boldsymbol{V}_2^{(\alpha)}$，$\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)}$: 節点での単位直交ベクトル

$\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)}$: ディレクタベクトル

$$\boldsymbol{g}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi},\ \boldsymbol{g}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \eta},\ \boldsymbol{g}_3 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \zeta}$$

: 共変基底ベクトル

$${}^0\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)} = \frac{{}^0\boldsymbol{g}_3}{|{}^0\boldsymbol{g}_3|}$$

Fig. MITC4 shell element

位置ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \sum_{\alpha=1}^{9} N^{(\alpha)}(\xi,\eta)\left(\boldsymbol{x}^{(\alpha)} + \frac{a}{2}\zeta \boldsymbol{V}_3^{(\alpha)}\right)$$

変位ベクトル

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - {}^0\boldsymbol{x}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{9} N^{(\alpha)}(\xi,\eta)\left\{\boldsymbol{u}^{(\alpha)} + \frac{a}{2}\zeta\left(\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)} - {}^0\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)}\right)\right\}$$

(微小変形を仮定)

$$\boldsymbol{u} = \sum_{\alpha=1}^{9} N^{(\alpha)}(\xi,\eta)\left\{\boldsymbol{u}^{(\alpha)} + \frac{a}{2}\zeta\left(\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)} - {}^0\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)}\right)\right\}$$

$$\simeq \sum_{\alpha=1}^{9} N^{(\alpha)}(\xi,\eta)\left\{\boldsymbol{u}^{(\alpha)} + \frac{a}{2}\zeta\left(\boldsymbol{\theta}^{(\alpha)} \times {}^0\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)}\right)\right\}$$

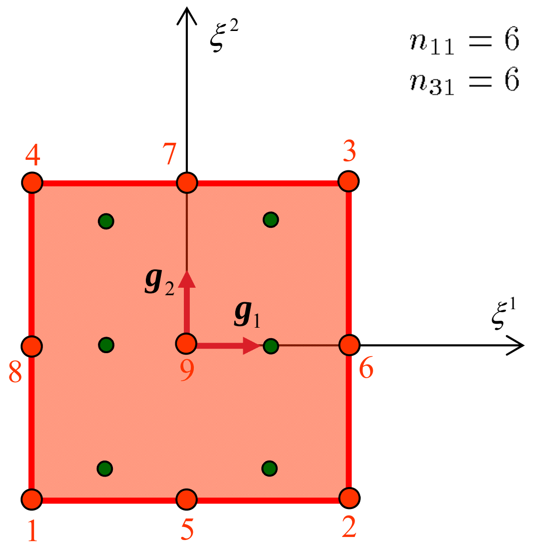
$$\begin{cases} \boldsymbol{u}^{(\alpha)} = \underline{u_x^{(\alpha)}}\,\boldsymbol{e}_x + \underline{u_y^{(\alpha)}}\,\boldsymbol{e}_y + \underline{u_z^{(\alpha)}}\,\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{\theta}^{(\alpha)} = \underline{\psi_1^{(\alpha)}}\,\boldsymbol{V}_1^{(\alpha)} + \underline{\psi_2^{(\alpha)}}\,\boldsymbol{V}_2^{(\alpha)} \end{cases}$$

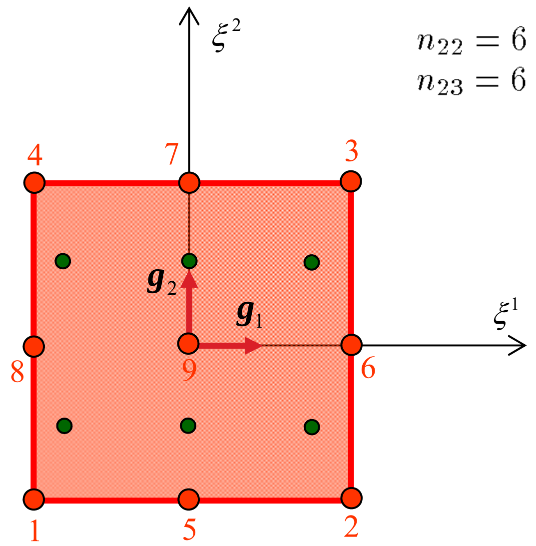
節点あたり5自由度

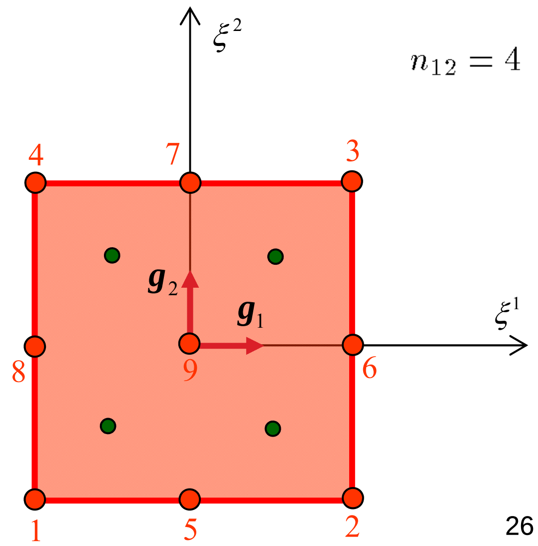
MITC9シェル要素 (2/2)

Bucalem, M.L. and Bathe, K.J., “Higher-order MITC general shell element,” International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.36, pp.3729-3754, (1993).

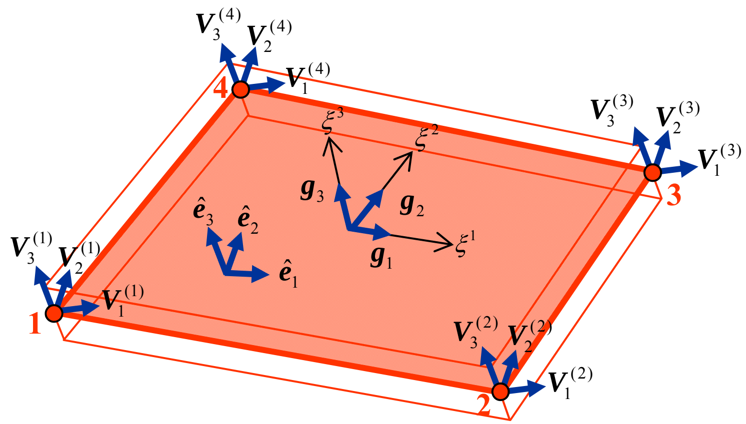
せん断ひずみ成分 $E^{\mathrm{AS}}_{IJ}(\xi^1,\xi^2,\xi^3)=\sum_{k=1}^{n_{IJ}} h^{IJ}_{(k)}(\Xi^1,\Xi^2)E^{\mathrm{DI}}_{IJ}(\xi^1_{(k)},\xi^2_{(k)},\xi^3)$		
$h^{11}_{(k)}(\Xi^1,\Xi^2) = h^{31}_{(k)}(\Xi^1,\Xi^2) = \left[\frac{1}{2}(1+\Xi^1_{(k)}\Xi^1)\right]\left[\frac{\Xi^2_{(k)}\Xi^2}{2}(1+\Xi^2_{(k)}\Xi^2)+(1-\Xi^2_{(k)}\Xi^2_{(k)})(1-\Xi^2\Xi^2)\right]$	$h^{22}_{(k)}(\Xi^1,\Xi^2) = h^{23}_{(k)}(\Xi^1,\Xi^2) = \left[\frac{\Xi^1_{(k)}\Xi^1}{2}(1+\Xi^1_{(k)}\Xi^1)+(1-\Xi^1_{(k)}\Xi^1_{(k)})(1-\Xi^1\Xi^1)\right]\left[\frac{1}{2}(1+\Xi^2_{(k)}\Xi^2)\right]$	$h^{12}_{(k)}(\Xi^1,\Xi^2) = \left[\frac{1}{2}(1+\Xi^1_{(k)}\Xi^1)\right]\left[\frac{1}{2}(1+\Xi^2_{(k)}\Xi^2)\right]$
$\begin{cases}\Xi^1 = \frac{\xi^1}{\sqrt{1/3}} \\ \Xi^2 = \frac{\xi^2}{\sqrt{3/5}}\end{cases}$	$\begin{cases}\Xi^1 = \frac{\xi^1}{\sqrt{3/5}} \\ \Xi^2 = \frac{\xi^2}{\sqrt{1/3}}\end{cases}$	$\begin{cases}\Xi^1 = \frac{\xi^1}{\sqrt{1/3}} \\ \Xi^2 = \frac{\xi^2}{\sqrt{1/3}}\end{cases}$
$\begin{cases}\{\Xi^1_{(k)}\} = \{-1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,-1\} \\ \{\Xi^2_{(k)}\} = \{-1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0\}\end{cases}$	$\begin{cases}\{\Xi^1_{(k)}\} = \{-1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ -1\} \\ \{\Xi^2_{(k)}\} = \{-1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,1\}\end{cases}$	$\begin{cases}\{\Xi^1_{(k)}\} = \{-1,\ 1,\ 1,\ -1\} \\ \{\Xi^2_{(k)}\} = \{-1,\ -1,\ 1,\ 1\}\end{cases}$







弾性テンソル成分の変換



$\boldsymbol{V}_1^{(\alpha)}$, $\boldsymbol{V}_2^{(\alpha)}$, $\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)}$ ：節点での単位直交ベクトル

$$\boldsymbol{g}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi},\ \boldsymbol{g}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \eta},\ \boldsymbol{g}_3 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \zeta}$$

：共変基底ベクトル

$\hat{\boldsymbol{e}}_1$, $\hat{\boldsymbol{e}}_2$, $\hat{\boldsymbol{e}}_3$ ：単位直交ベクトル

$$\hat{\boldsymbol{e}}_3 = \frac{\boldsymbol{g}_3}{|\boldsymbol{g}_3|},\quad \hat{\boldsymbol{e}}_1 = \frac{\boldsymbol{g}_2 \times \hat{\boldsymbol{e}}_3}{|\boldsymbol{g}_2 \times \hat{\boldsymbol{e}}_3|},\quad \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \hat{\boldsymbol{e}}_3 \times \hat{\boldsymbol{e}}_1$$

$$\boldsymbol{V}_3^{(\alpha)} = \hat{\boldsymbol{e}}_3,\quad \boldsymbol{V}_2^{(\alpha)} = \frac{\hat{\boldsymbol{e}}_3 \times \boldsymbol{e}_1}{|\hat{\boldsymbol{e}}_3 \times \boldsymbol{e}_1|},\quad \boldsymbol{V}_1^{(\alpha)} = \boldsymbol{V}_2^{(\alpha)} \times \boldsymbol{V}_3^{(\alpha)}$$

各節点において

弾性テンソル

$$\boldsymbol{C} = C^{ijkl}\, {}^0\boldsymbol{g}_i \otimes {}^0\boldsymbol{g}_j \otimes {}^0\boldsymbol{g}_k \otimes {}^0\boldsymbol{g}_l$$
$$= \hat{C}^{ijkl}\, \hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_j \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_k \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_l$$

$$\begin{pmatrix} \hat{C}^{1111} & \hat{C}^{1122} & \hat{C}^{1112} & \hat{C}^{1123} & \hat{C}^{1131} \\ \hat{C}^{2211} & \hat{C}^{2222} & \hat{C}^{2212} & \hat{C}^{2223} & \hat{C}^{2231} \\ \hat{C}^{1211} & \hat{C}^{1222} & \hat{C}^{1212} & \hat{C}^{1223} & \hat{C}^{1231} \\ \hat{C}^{2311} & \hat{C}^{2322} & \hat{C}^{2312} & \hat{C}^{2323} & \hat{C}^{2331} \\ \hat{C}^{3111} & \hat{C}^{3122} & \hat{C}^{3112} & \hat{C}^{3123} & \hat{C}^{3131} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k\frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k\frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$

E ：Young率
ν ：Poisson比
k ：せん断補正係数

$$C^{ijkl} = (\boldsymbol{C} : {}^0\boldsymbol{g}^i \otimes {}^0\boldsymbol{g}^j) : {}^0\boldsymbol{g}^k \otimes {}^0\boldsymbol{g}^l$$
$$= \hat{C}^{mnop} ({}^0\hat{\boldsymbol{e}}_m \cdot {}^0\boldsymbol{g}^i)({}^0\hat{\boldsymbol{e}}_n \cdot {}^0\boldsymbol{g}^j)({}^0\hat{\boldsymbol{e}}_o \cdot {}^0\boldsymbol{g}^k)({}^0\hat{\boldsymbol{e}}_p \cdot {}^0\boldsymbol{g}^l)$$

シェル要素による定式化の注意

(1) 5自由度として計算する場合
(ディレクタ回りの回転自由度を計算しない場合)
(2) 6自由度として計算する場合
(ディレクタ回りの回転自由度をdrilling DOFとして計算する場合)

(A) 隣接要素の節点で同じディレクタベクトルを使用する場合
(B) 隣接要素の節点で別のディレクタベクトルを使用する場合

FrontISTRでは，(2) と (B) の定式化を使用しています

Drilling DOFの考慮 (1/2)

シェル要素の節点あたりの自由度数を6として，六つ目の自由度 (drilling DOFと呼ばれる三つ目の回転自由度) を考慮 (Hughes and Brezzi 1989)

$$\boldsymbol{u} = \sum_{\alpha=1}^{n} N^{(\alpha)}(\xi^1, \xi^2)\left\{\boldsymbol{u}^{(\alpha)} + \frac{a}{2}\xi^3(\mathbf{V}_3^{(\alpha)} - {}^0\mathbf{V}_3^{(\alpha)})\right\}$$

$$\simeq \sum_{\alpha=1}^{n} N^{(\alpha)}(\xi^1, \xi^2)\left\{\boldsymbol{u}^{(\alpha)} + \frac{a}{2}\xi^3(\boldsymbol{\theta}^{(\alpha)} \times {}^0\mathbf{V}_3^{(\alpha)})\right\}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}^{(\alpha)} = u_x^{(\alpha)}\,\boldsymbol{e}_x + u_y^{(\alpha)}\,\boldsymbol{e}_y + u_z^{(\alpha)}\,\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{\theta}^{(\alpha)} = \theta_x^{(\alpha)}\,\boldsymbol{e}_x + \theta_y^{(\alpha)}\,\boldsymbol{e}_y + \theta_z^{(\alpha)}\,\boldsymbol{e}_z \end{cases}$$

drilling DOFを考慮した場合のエネルギー

$$\Phi^{**} = \int_V \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}\, dV - \int_{S_t} \boldsymbol{u}\cdot\underline{\boldsymbol{t}}\, dS - \int_V \boldsymbol{u}\cdot\rho\boldsymbol{b}\, dV + \int_V \lambda^{31}(\varepsilon_{31} - \varepsilon_{31}^{\mathrm{DI}})dV + \int_V \lambda^{23}(\varepsilon_{23} - \varepsilon_{23}^{\mathrm{DI}})dV$$

$$+ \int_V \frac{\alpha}{2}\left\{{}^0\mathbf{V}_3 \cdot \left(\boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2}\boldsymbol{e} : \boldsymbol{\Theta}\right)\right\}\left\{{}^0\mathbf{V}_3 \cdot \left(\boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2}\boldsymbol{e} : \boldsymbol{\Theta}\right)\right\}dV \qquad (\alpha / \mu = 0.0001 \sim 1.0)$$

$$\boldsymbol{\Theta} = \frac{1}{2}\left\{{}^0\nabla \otimes \boldsymbol{u} - ({}^0\nabla \otimes \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\right\} \qquad \boldsymbol{e} = e_{ijk}\,\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k$$

Hughes, T.J.R. and Brezzi, F., *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.72, pp.105-121, (1989).

Nguyen-Van, Hieu and Mai-Duy, Nam and Tran-Cong, Thanh, *CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol.49, No.2, pp.81-110, (2009).

Drilling DOFの考慮 (1/2)

$\delta\Phi^{**}=0$ より，仮想仕事の原理

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV + \int_V \alpha \left\{ {}^0V_3 \cdot \left(\boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2}\boldsymbol{e} : \boldsymbol{\Theta} \right) \right\} \left\{ {}^0V_3 \cdot \left(\delta\boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2}\boldsymbol{e} : \delta\boldsymbol{\Theta} \right) \right\} dV$$

$$= \int_{S_t} \delta\boldsymbol{u} \cdot \underline{\boldsymbol{t}}\, dS + \int_V \delta\boldsymbol{u} \cdot \rho\boldsymbol{b}\, dV$$

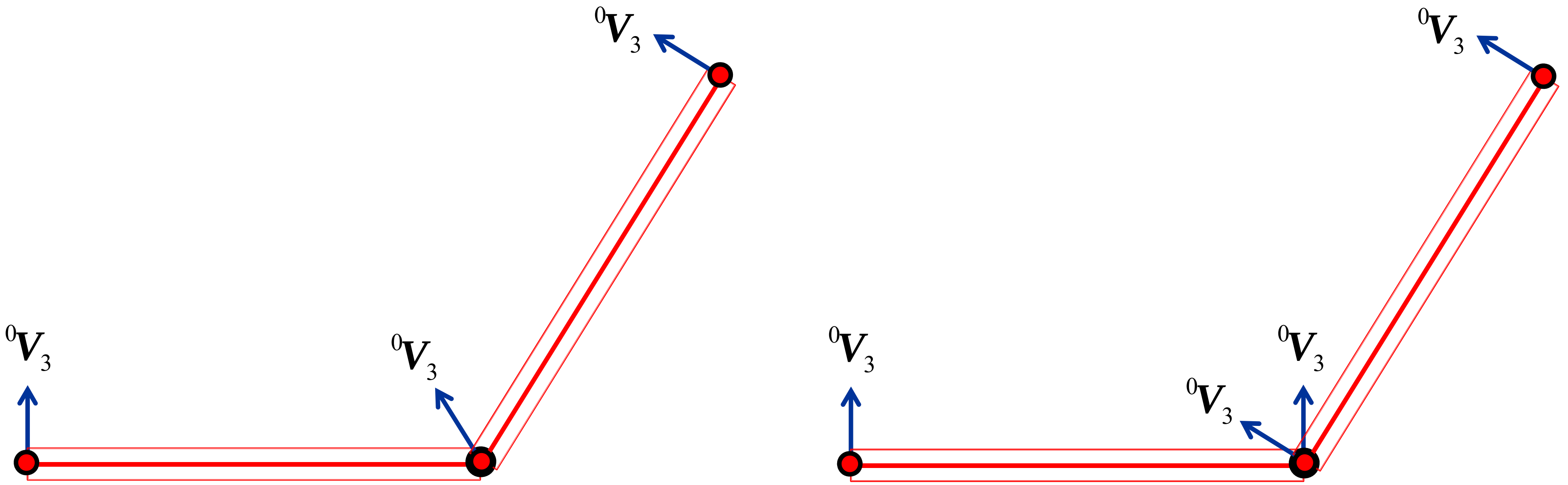
$(\alpha / \mu = 0.0001 \sim 1.0)$

$$\begin{cases} \varepsilon_{31} = \varepsilon_{31}^{\mathrm{AS}} = \dfrac{1}{2}(1-\eta)\,\varepsilon_{31}^{\mathrm{DI}}(0,\,-1,\,0) + \dfrac{1}{2}(1+\eta)\,\varepsilon_{31}^{\mathrm{DI}}(0,\,1,\,0) \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{23}^{\mathrm{AS}} = \dfrac{1}{2}(1-\xi)\,\varepsilon_{23}^{\mathrm{DI}}(-1,\,0,\,0) + \dfrac{1}{2}(1+\xi)\,\varepsilon_{23}^{\mathrm{DI}}(1,\,0,\,0) \end{cases}$$

変形前のディレクタベクトル

(A) 隣接要素の節点で同じディレクタベクトルを使用する場合

(B) 隣接要素の節点で別のディレクタベクトルを使用する場合



FrontISTRの梁要素／シェル要素の解説

目次

１．FrontISTRにおけるBernoulli-Euler梁要素／MITCシェル要素を用いた解析
- 理論
- 現バージョンのプログラム
- 解析事例

２．シェル要素／梁要素とソリッド要素を混ぜた解析
- 理論
- 現バージョンのプログラム
- 解析事例

FrontISTRの梁要素／シェル要素の解説

目次

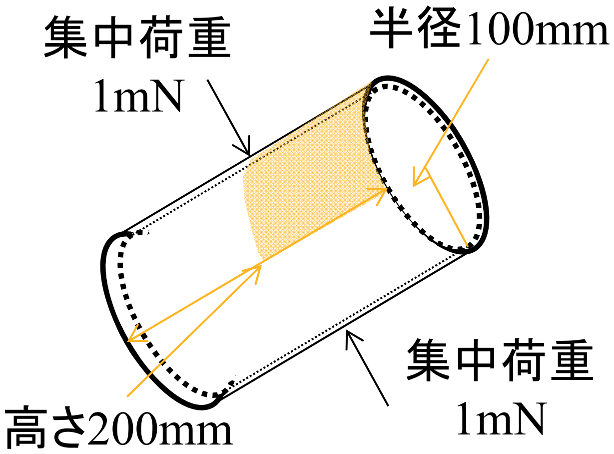
１．FrontISTRにおけるBernoulli-Euler梁要素／MITCシェル要素を用いた解析
- 理論
- 現バージョンのプログラム
- 解析事例

２．シェル要素／梁要素とソリッド要素を混ぜた解析
- 理論
- 現バージョンのプログラム
- 解析事例

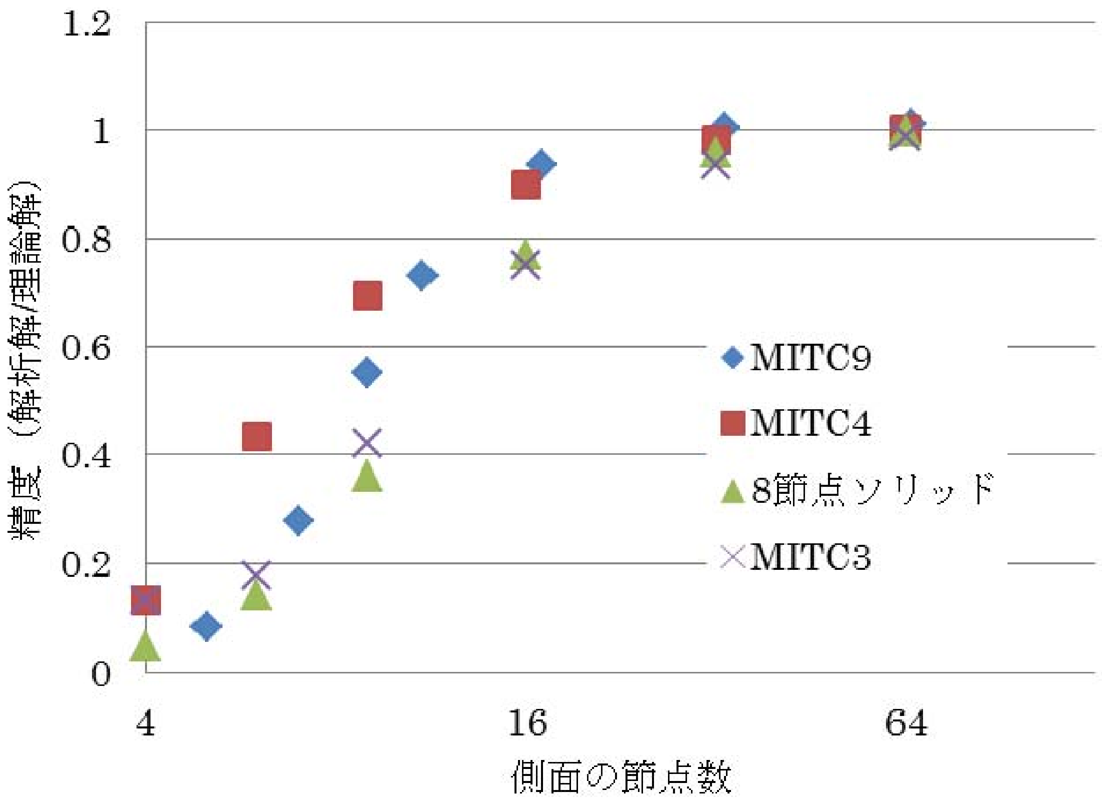
シェル要素とソリッド要素の計算結果の比較

「奥田洋司, 早田浩平, 橋本学, 上島豊, “クラウドCAEシステムを用いた効率的な有限要素モデリング,” 日本計算工学会 第18回計算工学講演会, 2013.」より

薄膜構造の円筒



Pinched cylinder model
(Bucalem and Bathe 1993)



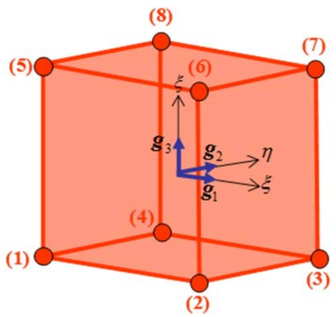
メッシュの規模による計算精度の違い

Bucalem, M.L. and Bathe, K.J., *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.36, pp.3729-3754, (1993).

FrontISTRの梁要素／シェル要素の解説

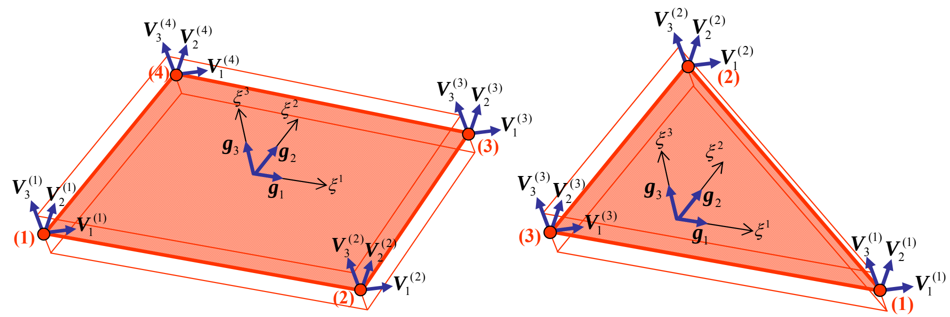
目次

要素混在問題における3×3BCSR形式での格納



$$\begin{pmatrix} u_x^{(\alpha)} \\ u_y^{(\alpha)} \\ u_z^{(\alpha)} \end{pmatrix}$$

3 DOFs at each node



Stiffness matrix (sparse matrix)

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \underbrace{\mathbf{K}_{11}}_{3\times3} & \underbrace{\mathbf{K}_{12}}_{3\times3} & \cdots & \underbrace{\mathbf{K}_{1N}}_{3\times3} \\ \underbrace{\mathbf{K}_{21}}_{3\times3} & \underbrace{\mathbf{K}_{22}}_{3\times3} & \cdots & \underbrace{\mathbf{K}_{2N}}_{3\times3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{\mathbf{K}_{N1}}_{3\times3} & \underbrace{\mathbf{K}_{N2}}_{3\times3} & \cdots & \underbrace{\mathbf{K}_{NN}}_{3\times3} \end{pmatrix}$$

N: Number of original and dummy nodes

Dummy node

$$\begin{pmatrix} u_x^{(\alpha)} \\ u_y^{(\alpha)} \\ u_z^{(\alpha)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_x^{(\beta)} \\ \theta_y^{(\beta)} \\ \theta_z^{(\beta)} \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} u_x^{(\alpha)} \\ u_y^{(\alpha)} \\ u_z^{(\alpha)} \\ \theta_x^{(\alpha)} \\ \theta_y^{(\alpha)} \\ \theta_z^{(\alpha)} \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} u_x^{(\alpha)} \\ u_y^{(\alpha)} \\ u_z^{(\alpha)} \\ \theta_1^{(\alpha)} \\ \theta_2^{(\alpha)} \end{pmatrix}$$

3 DOFs at each node

drilling DOF[7][8]

6 DOFs at each node

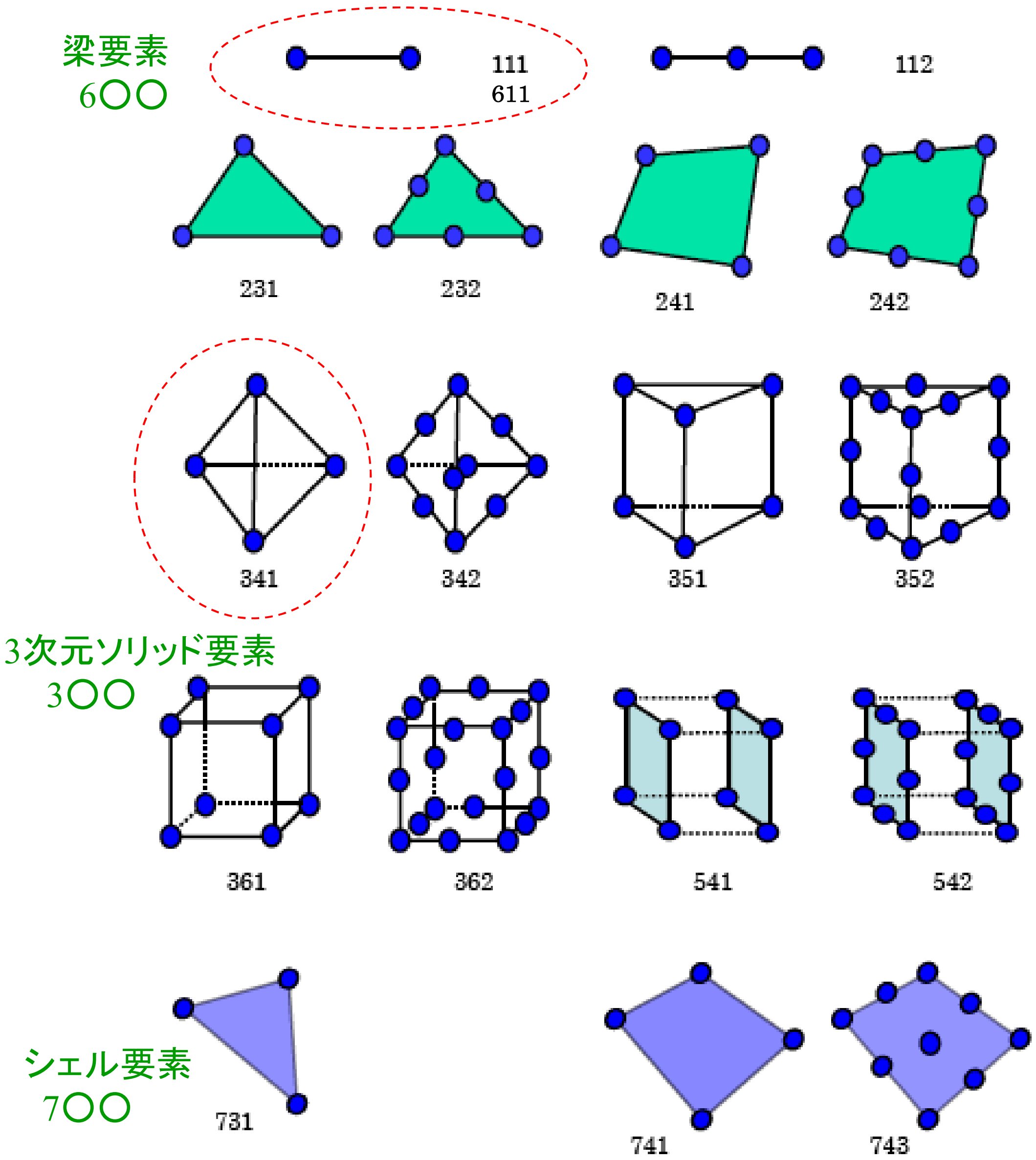
5 DOFs at each node

Fig. 3×3 BCSR format for solid and shell elements.

Hughes, T.J.R. and Brezzi, F., *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.72, pp.105-121, 1989.

Nguyen-Van, Hieu and Mai-Duy, Nam and Tran-Cong, Thanh, *CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol.49, No.2, pp.81-110, 2009.

FrontISTRの既存の要素データの利用 (1/2)



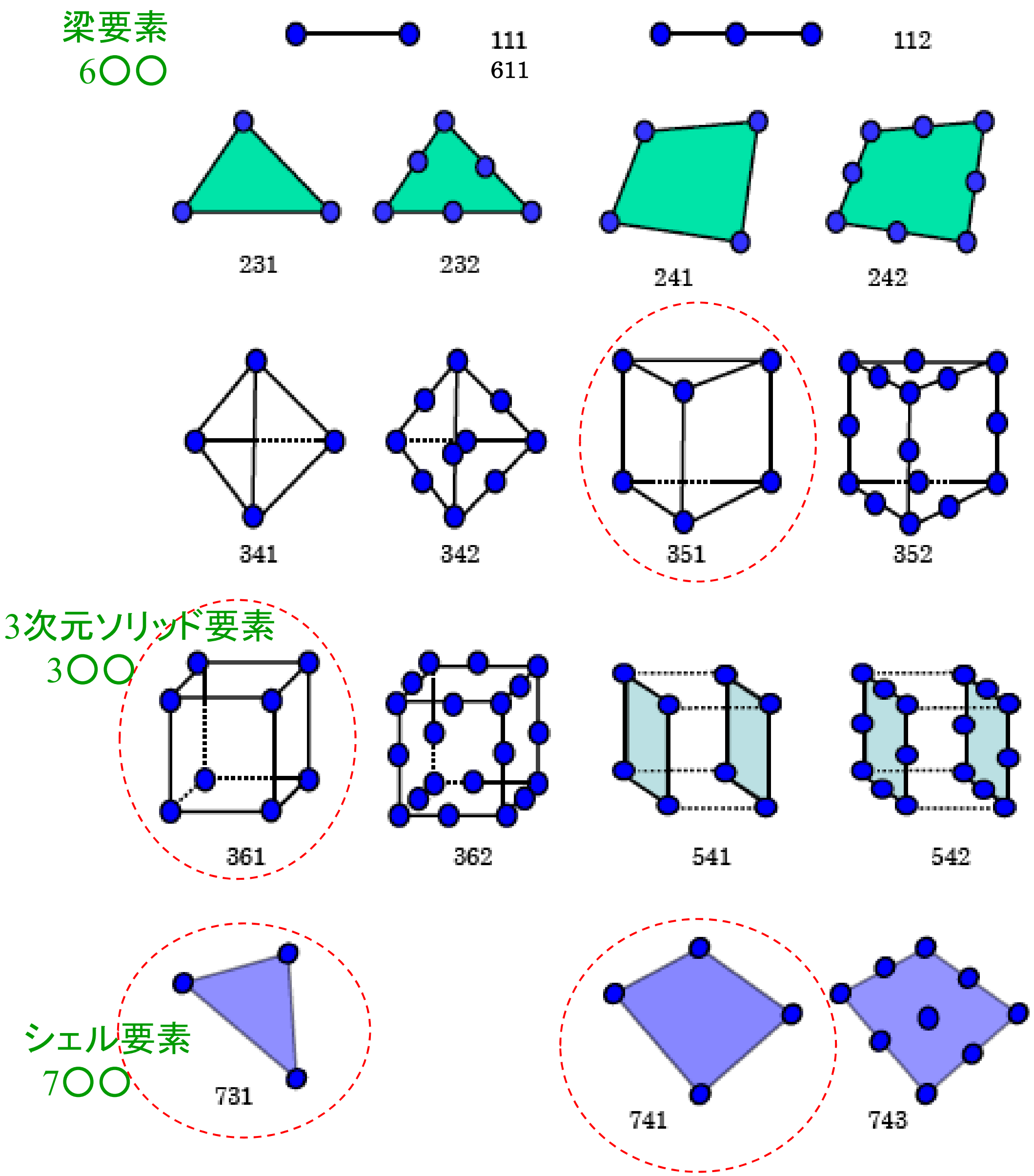
節点あたりの自由度

- 3次元ソリッド要素：3
- シェル要素：6
- 梁要素：6

ソリッド要素と梁要素／シェル要素を混在させる場合，
節点あたり3自由度の
データ構造に統一して，
剛性マトリックスを作成し，
線形ソルバーに渡すようにする

梁要素のデータ構造が
節点あたり3自由度を持つように，
四面体要素341のデータ構造を
利用した要素タイプ641を
導入する

FrontISTRの既存の要素データの利用 (2/2)



節点あたりの自由度

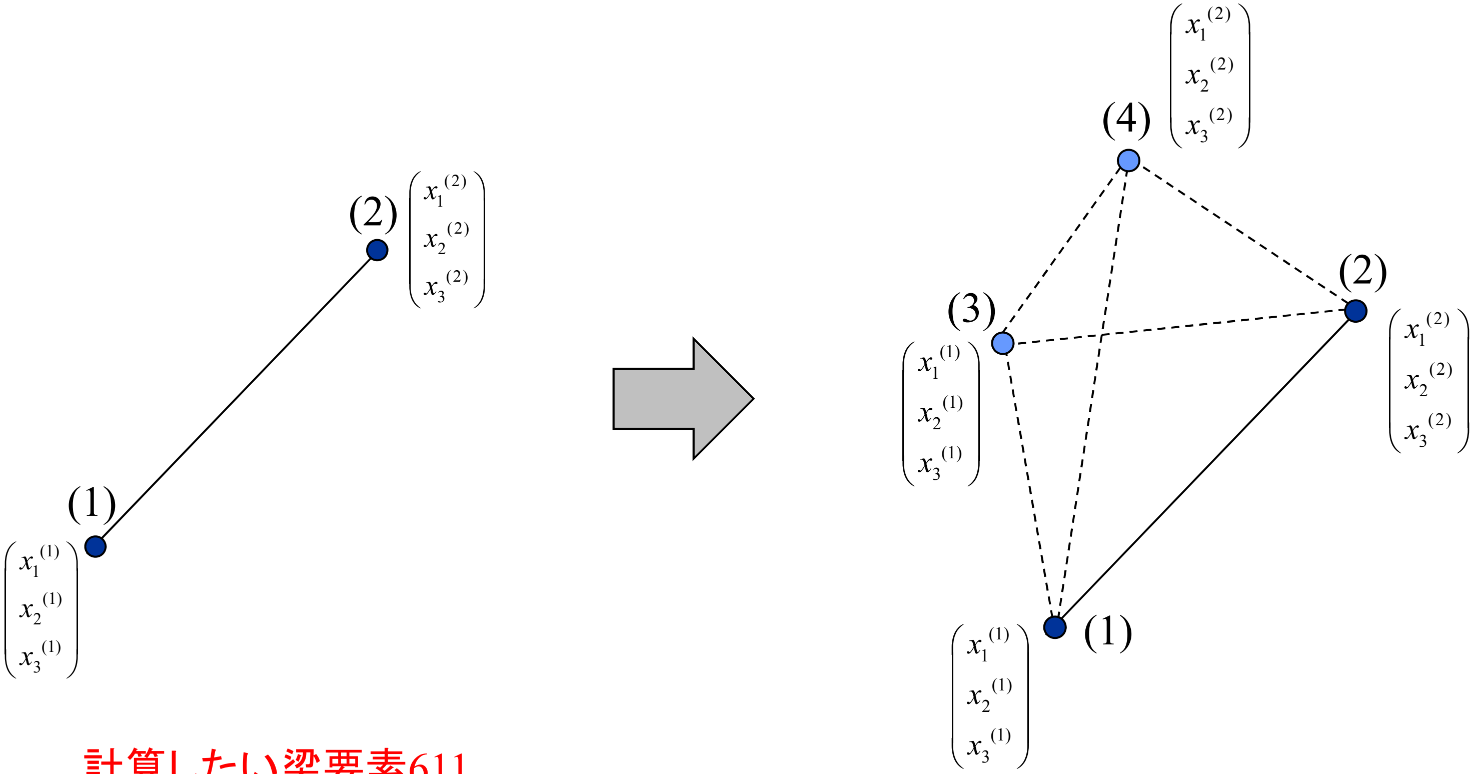
- 3次元ソリッド要素：3
- シェル要素：6
- 梁要素：6

ソリッド要素と梁要素／シェル要素を混在させる場合，節点あたり3自由度のデータ構造に統一して，剛性マトリックスを作成し，線形ソルバーに渡すようにする

MITC4シェル要素のデータ構造が節点あたり3自由度を持つように，六面体要素361のデータ構造を利用した要素タイプ761を導入する

要素タイプ641 (1)

FrontISTRのメッシュファイルでは，節点座標を二つ用意する
(メッシュを表示する際に都合が良いためであるが，
計算には使用しないので (3) と (4) の節点座標はどのような値でも良い)

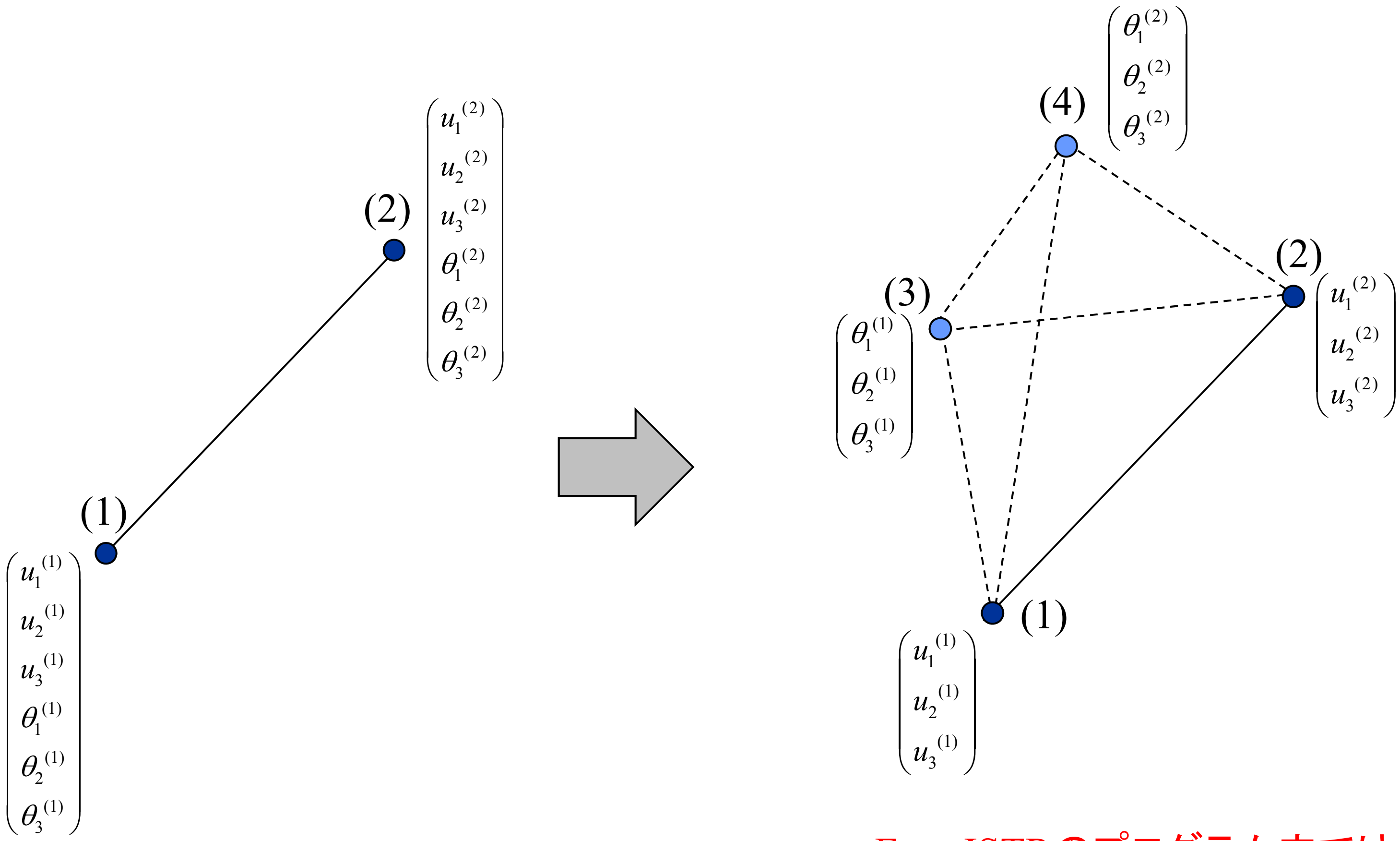


計算したい梁要素611

入力データとして用意するのは
四面体要素431のデータ構造

要素タイプ641 (2)

FrontISTRのプログラム内では，(3) と (4) の節点変位は梁の回転自由度となる



計算したい梁要素611

FrontISTRのプログラム内では
四面体要素431のデータ構造

要素タイプ641 (3)

FrontISTRのプログラム内では，
梁要素の剛性マトリックス成分をテーブルに従って変更する

剛性マトリックス (梁要素611)

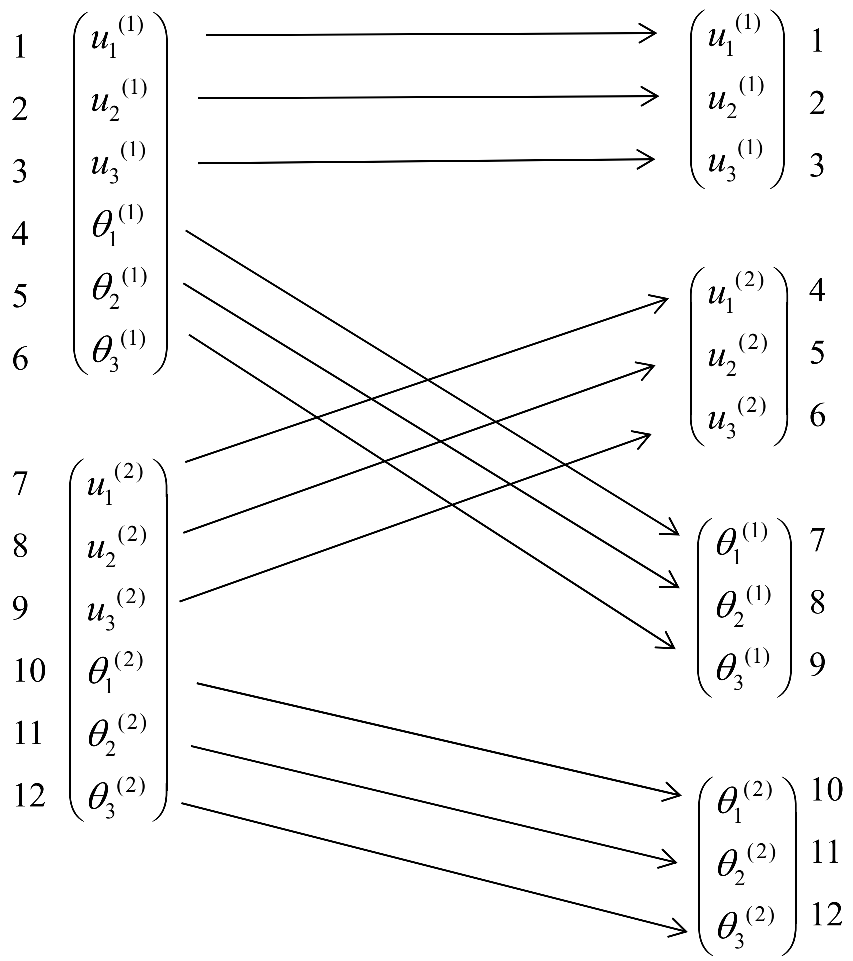
$$
\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \cdots & K_{1,11} & K_{1,12} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \cdots & K_{2,11} & K_{2,12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K_{11,1} & K_{11,2} & \cdots & K_{11,11} & K_{11,12} \\ K_{12,1} & K_{12,2} & \cdots & K_{12,11} & K_{12,12} \end{pmatrix}
$$

FrontISTRのプログラム内で計算する
剛性マトリックス

$$
\mathbf{K}' = \begin{pmatrix} K'_{1,1} & K'_{1,2} & \cdots & K'_{1,11} & K'_{1,12} \\ K'_{2,1} & K'_{2,2} & \cdots & K'_{2,11} & K'_{2,12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K'_{11,1} & K'_{11,2} & \cdots & K'_{11,11} & K'_{11,12} \\ K'_{12,1} & K'_{12,2} & \cdots & K'_{12,11} & K'_{12,12} \end{pmatrix}
$$

例えば，$K'_{4,8} = K_{7,5}$

テーブル



FrontISTRの梁要素／シェル要素の解説

目次

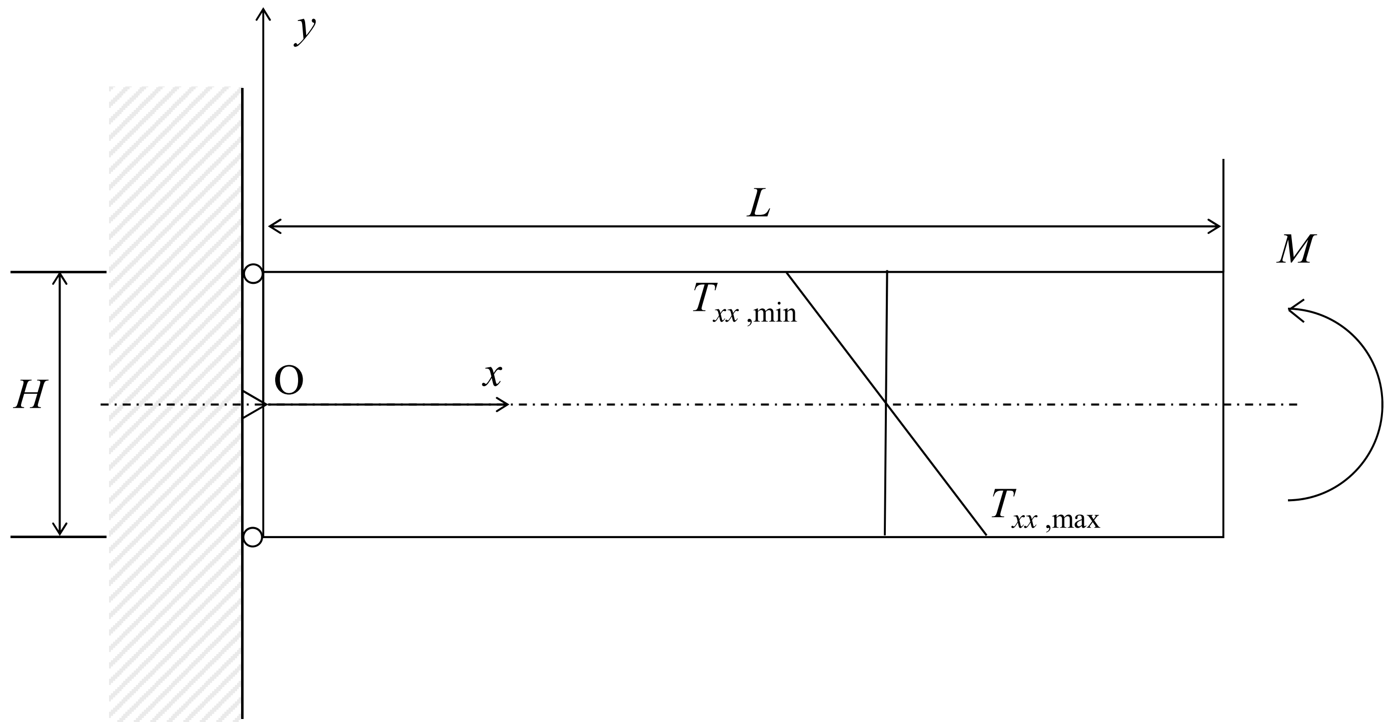
１. FrontISTRにおけるBernoulli-Euler梁要素／MITCシェル要素を用いた解析
・理論
・現バージョンのプログラム
・解析事例

２. シェル要素／梁要素とソリッド要素を混ぜた解析
・理論
・現バージョンのプログラム
・解析事例

FrontISTRの梁要素／シェル要素の解説

目次

梁の曲げ解析 (解析モデル)



Young's modulus: E = 200,000 MPa

Poisson's ratio: $\nu = 0$

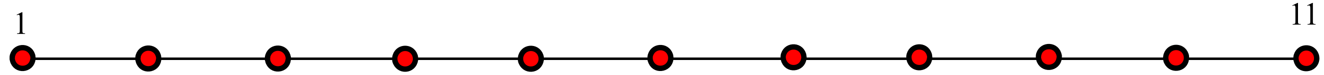
Geometry: L = 100 mm, H = 10 mm

$T_{xx,\max}$ = 60 MPa

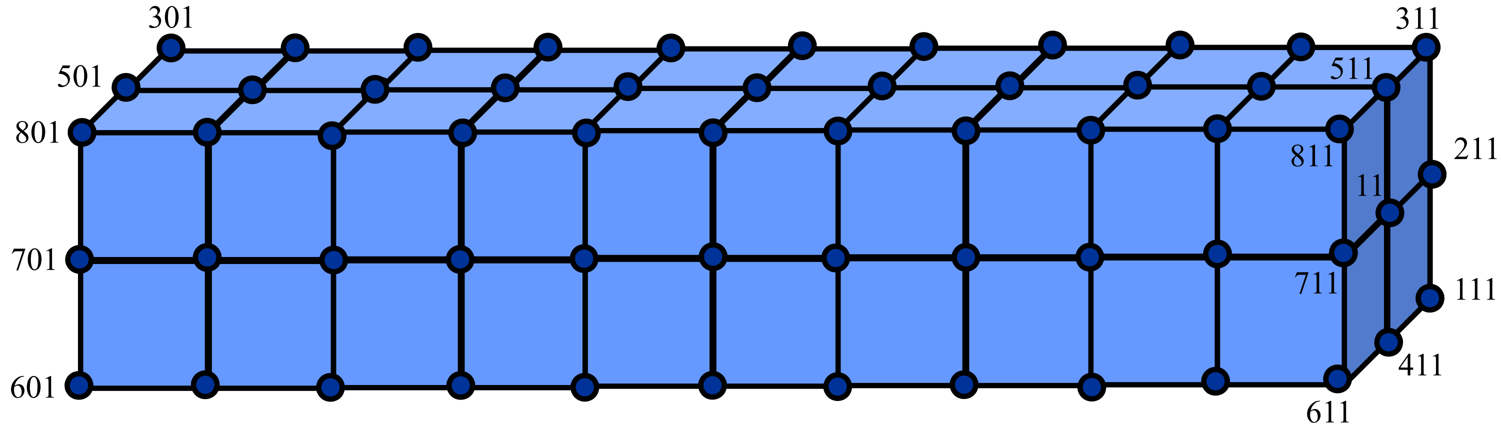
$T_{xx,\min}$ = −60 MPa

梁の曲げ解析 (メッシュ)

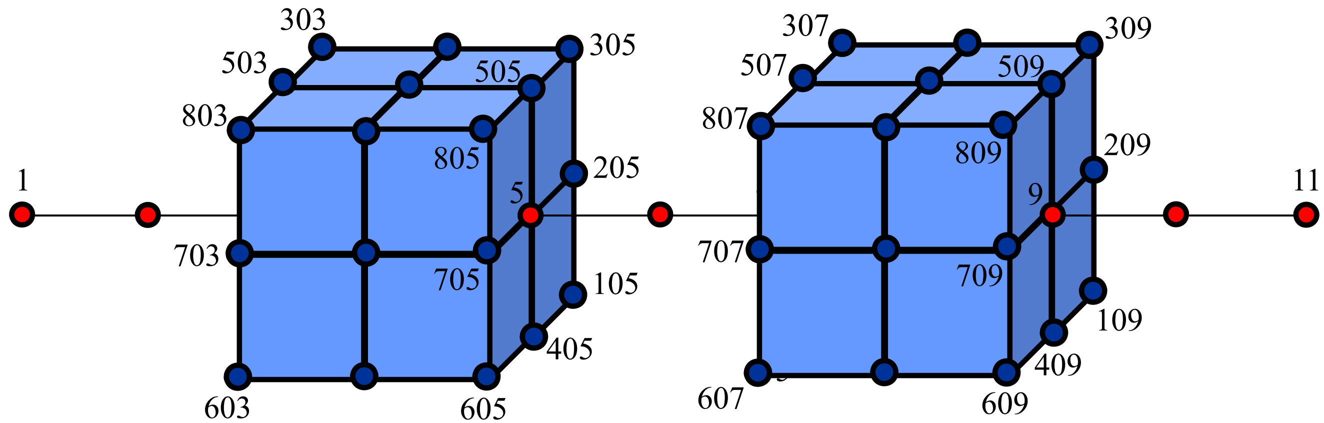
Case A : 梁1次要素



Case B : ソリッド1次要素 (非適合要素)

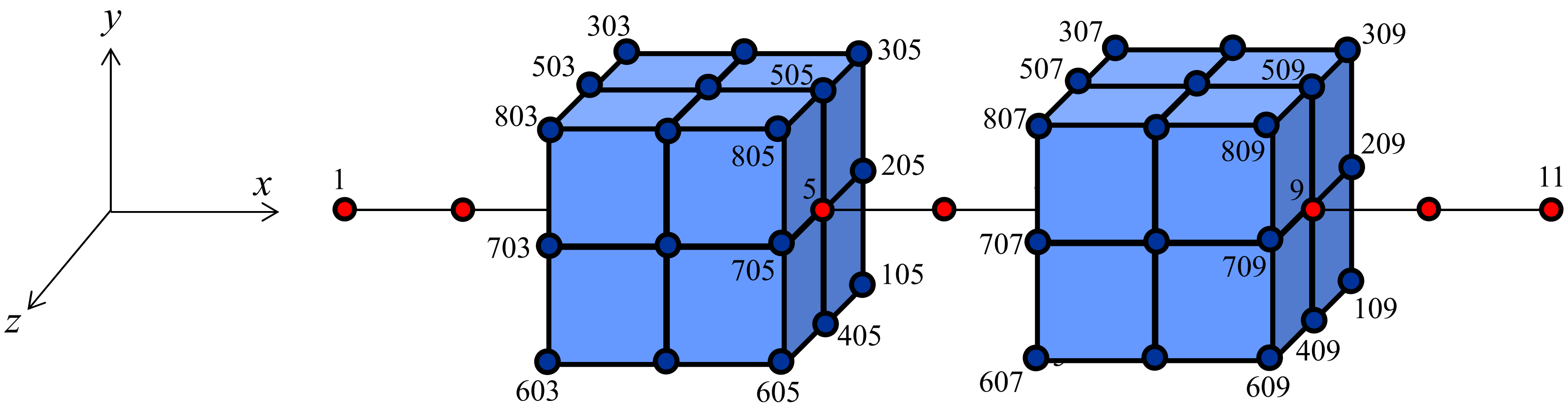


Case C : 梁1次要素とソリッド1次要素の混合



梁の曲げ解析 (梁1次要素とソリッド1次要素の混合)

梁の中立軸と x 軸を一致させる



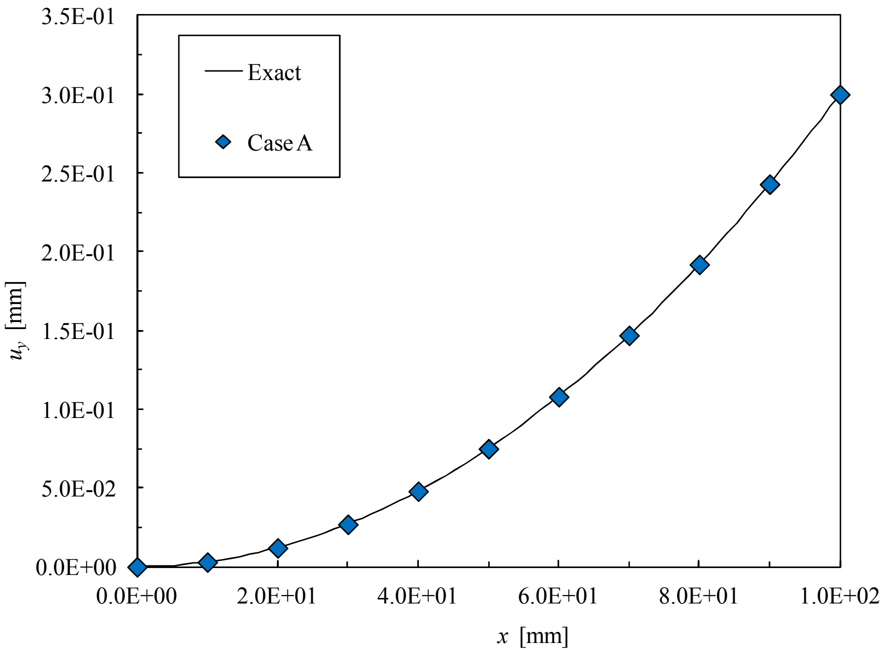
中立軸上の節点5の変位を (u_x, u_y, u_z) ，回転自由度を $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ とすると，
同じ断面上にある節点105，205，305，405，505，605，705，805の
変位 (u'_x, u'_y, u'_z) を以下の式によって拘束する (ただし，微小変形を仮定)

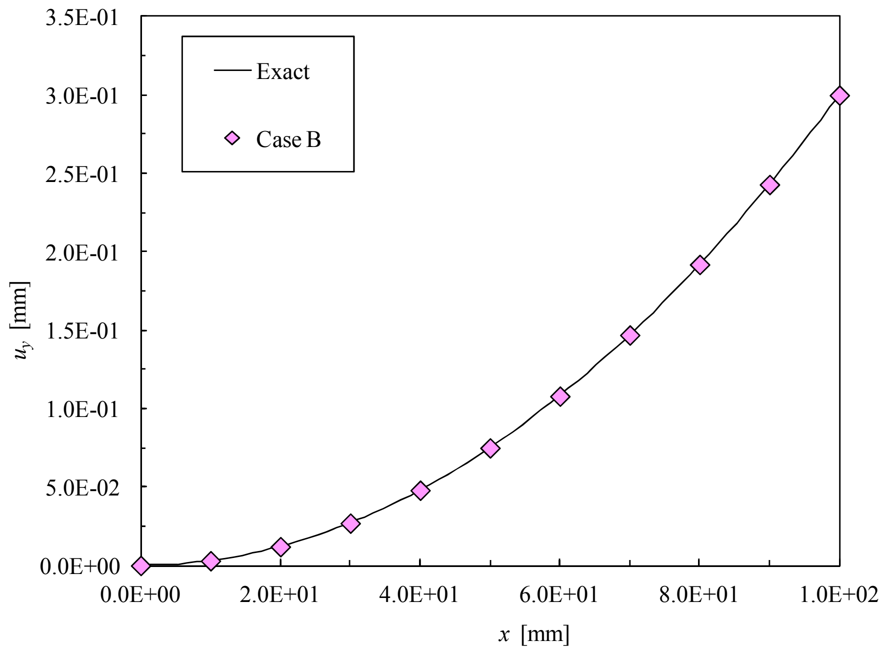
$$
\begin{cases}
u'_x = u_x - y\,\theta_z + z\,\theta_y \\
u'_y = u_y - z\,\theta_x \\
u'_z = u_z + y\,\theta_x
\end{cases}
$$

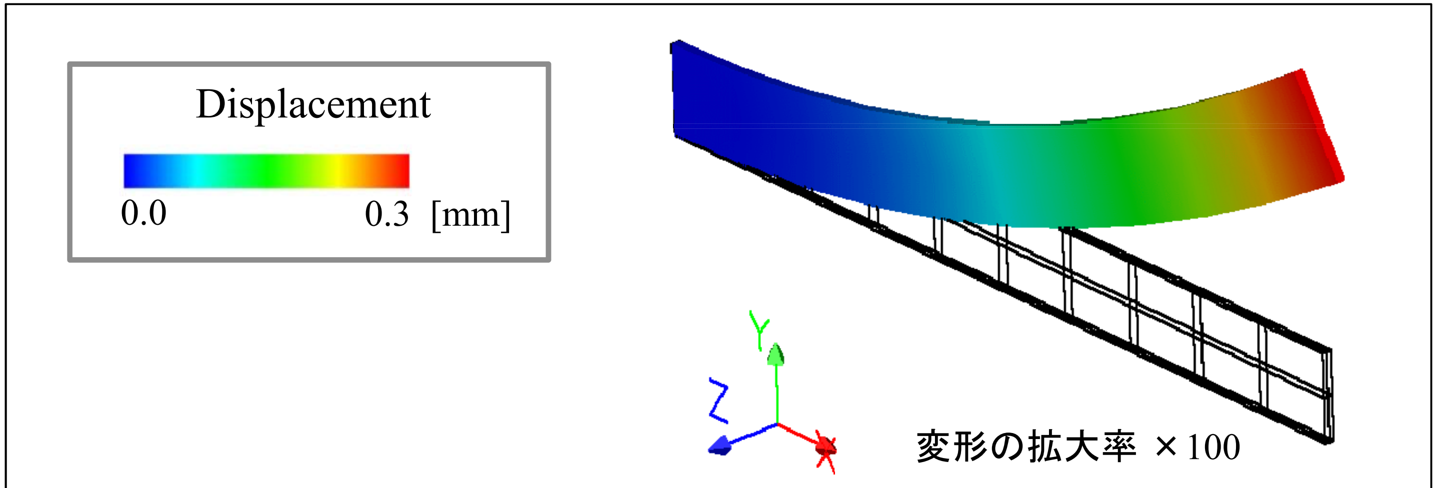
梁の曲げ解析 (梁1次要素とソリッド1次要素の混合)

$$\begin{cases} u_x^{105} = u_x^{5} + \dfrac{H}{2}\theta_z^{5} \\ u_x^{205} = u_x^{5} \\ u_x^{305} = u_x^{5} - \dfrac{H}{2}\theta_z^{5} \\ u_x^{405} = u_x^{5} + \dfrac{H}{2}\theta_z^{5} \\ u_x^{505} = u_x^{5} - \dfrac{H}{2}\theta_z^{5} \\ u_x^{605} = u_x^{5} + \dfrac{H}{2}\theta_z^{5} \\ u_x^{705} = u_x^{5} \\ u_x^{805} = u_x^{5} - \dfrac{H}{2}\theta_z^{5} \end{cases}$$

梁の曲げ解析 (計算結果：Case AとCase B)

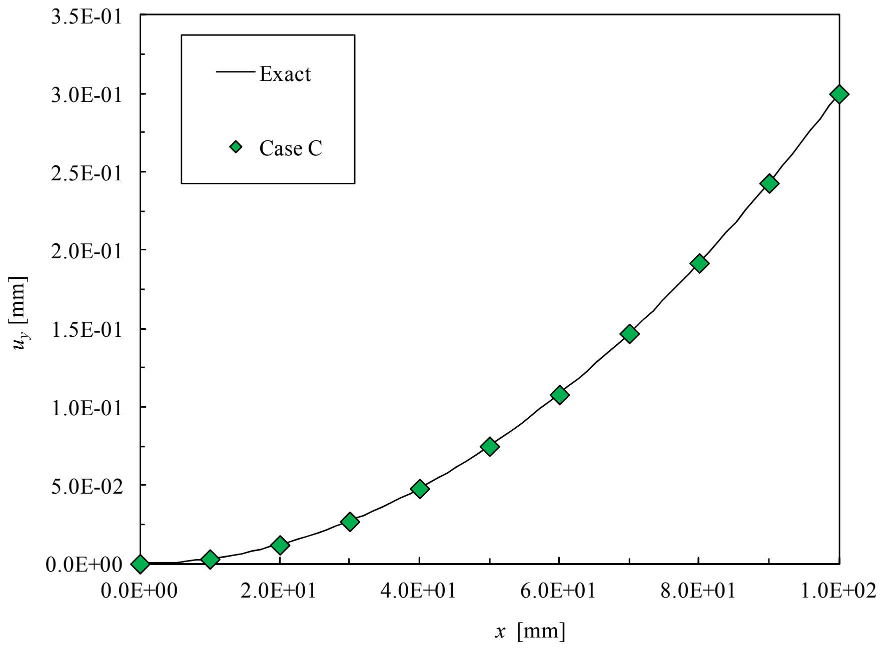


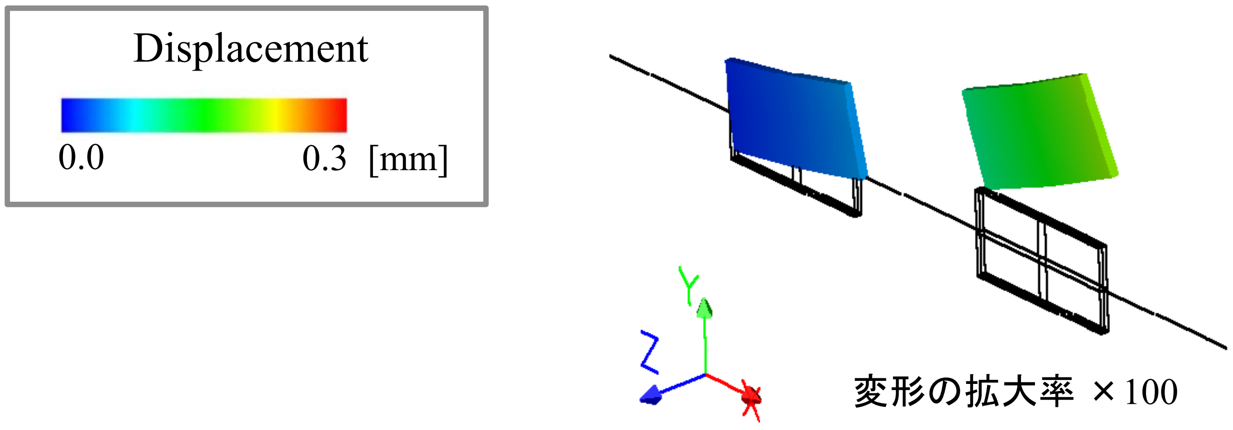




Case Bの変形形状

梁の曲げ解析 (計算結果:Case C)





Case Cの変形形状