#### 第40回FrontISTR研究会 (2017年12月22日), 本郷キャンパス

## FrontISTRによる 非圧縮流れ解析

#### 東京大学 新領域創成科学研究科 人間環境学専攻 生野 達大

## 1. 非圧縮流れ解析

#### 1.1 概要

- FrontISTRにはバージョン4.6より,動的陰解法ルーチンに組み込む 形で非圧縮流れ解析機能が実現されています.
- 本発表では、支配方程式とその空間方向・時間方向への離散化について整理します。
- ・また、これらの方程式が構造解析を目的とした作られたFrontISTR の枠組みにどのように実装されているか、利用する際はどのように すればよいかについて説明します.
- ・最後に、検証問題を解いた結果について説明します.

### 1.2 支配方程式

o t

・非圧縮性流れの支配方程式として次の3式を考える.

非圧縮性流体のNavier-Stokes方程式

$${}^{t}\rho\frac{\partial^{t}\boldsymbol{v}}{\partial t} + {}^{t}\rho({}^{t}\overline{\boldsymbol{v}}\cdot{}^{t}\nabla){}^{t}\boldsymbol{v} = {}^{t}\rho{}^{t}\boldsymbol{b} - {}^{t}\nabla{}^{t}\boldsymbol{p} + {}^{t}\nabla\cdot{}^{t}\boldsymbol{T}' \quad (1)$$

方程式を非線形化するため、既知の量を用いる

FrontISTRでは前の時刻の速度を用いている Newton流体の構成則

$${}^{t}\boldsymbol{T}' = {}^{t}\mu({}^{t}\nabla \otimes {}^{t}\boldsymbol{v} + ({}^{t}\nabla \otimes {}^{t}\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}) \qquad (2)$$

非圧縮性流体の連続の式

 ${}^{t}\nabla \cdot {}^{t}\boldsymbol{v} = 0 \quad (3)$ 

t:時刻  $t_{\rho}$ :質量密度 *t*<sub>1</sub>: 速度ベクトル <sup>t</sup>v :移流速度ベクトル *<sup>t</sup>*▽ :ナブラ演算子 <sup>t</sup>b:体積カベクトル  $t_{p}$ :静水圧力 *<sup>t</sup>T'*:粘性応力テンソル *<sup>t</sup>μ* ∶粘度

# 1.3 空間方向の離散化a). 変数の補間

#### ・要素 e において次の式のように速度, 圧力を補間する

$${}^{t}\boldsymbol{v} = N_{e}^{(\alpha) \ t} \boldsymbol{v}_{e}^{(\alpha)}$$
 (4)

$${}^tp = N_e^{(\alpha)} \, {}^tp_e^{(\alpha)} \tag{5}$$

同じ項に同じギリシャ文字が2回以上出てくる場合, 1から要素節点数までの総和を取ることを意味する.

 $N_e^{(\alpha)}$ :要素 e の局所節点  $\alpha$  における形状関数  ${}^t v_e^{(\alpha)}$ :要素 e の局所節点  $\alpha$  における節点流速ベクトル  ${}^t p_e^{(\alpha)}$ :要素 e の局所節点  $\alpha$  における節点静水圧力

# 1.3 空間方向の離散化b). 重み付き残差法

・次式で定義される残差を考える.

$${}^{t}\boldsymbol{r}_{\rm NS} = {}^{t}\rho \frac{\partial {}^{t}\boldsymbol{v}}{\partial t} + {}^{t}\rho ({}^{t}\overline{\boldsymbol{v}} \cdot {}^{t}\nabla){}^{t}\boldsymbol{v} - {}^{t}\rho {}^{t}\boldsymbol{b} + {}^{t}\nabla {}^{t}p - {}^{t}\nabla \cdot {}^{t}\boldsymbol{T}' \quad (6)$$
$${}^{t}\boldsymbol{r}_{\rm IC} = {}^{t}\nabla \cdot {}^{t}\boldsymbol{v} \qquad (7)$$

- ・重み関数をかけて領域全体で積分すると0になるものとして定式化 を行う(重み付き残差法).
  - ・重み関数が任意の値を取りうることを考慮して空間方向の離散式を得る

6

$$\int_{t_{\Omega}} \delta \boldsymbol{v} \cdot {}^{t} \boldsymbol{r}_{\rm NS} dV = 0 \quad (8) \qquad \qquad \int_{t_{\Omega}} \delta p \cdot {}^{t} \boldsymbol{r}_{\rm IC} dV = 0 \quad (9)$$

 ${}^t\Omega$  : 流体領域  $\delta oldsymbol{v}$  : 重み関数ベクトル  $\delta p$  : 重み関数

### 1.3 空間方向の離散化 c). Galerkin法

・重み関数は未知変数の補間と同じ形式で補間する (Galerkin法).  $\delta v = N_e^{(\alpha)} \delta v_e^{(\alpha)}$  (10)  $\delta p = N_e^{(\alpha)} \delta p_e^{(\alpha)}$  (11)

$$\delta m{v}_{e}^{(lpha)}$$
:要素  $e$ の局所節点  $lpha$ における節点重みベクトル $\delta p_{e}^{(lpha)}$ :要素  $e$ の局所節点  $lpha$ における節点重み

## 1.3 空間方向の離散化 d). GLS法による安定化 • 次の2乗残差を考える. ${}^{t}R_{NS} = \frac{1}{2} \int_{t_{\Omega}} {}^{t}r_{NS} \cdot {}^{t}r_{NS} dV$ (12)

• Galerkin Least Squares (GLS) 法<sup>1)</sup>では, 2乗残差の一次の最適性条件を満足する解が得られるよう次のように解くべき式を変更する.

$$\int_{t_{\Omega}} \delta \boldsymbol{v} \cdot {}^{t} \boldsymbol{r}_{\text{NS}} dV + \sum_{e} \int_{t_{\Omega_{e}}} \tau_{e} \delta \boldsymbol{v}^{(\alpha)} \frac{\partial^{t} R_{\text{NS}}}{\partial^{t} \boldsymbol{v}^{(\alpha)}} dV = 0 \quad (13)$$
$$\int_{t_{\Omega}} \delta p^{t} r_{\text{IC}} dV + \sum_{e} \int_{t_{\Omega_{e}}} \frac{\tau_{e}}{t_{\rho}} \delta p^{(\alpha)} \frac{\partial^{t} R_{\text{NS}}}{\partial^{t} p^{(\alpha)}} dV = 0 \quad (14)$$

8

※V4.6 では、1) 速度と圧力の補間の形式が同一であり、2) 重み関数は時間変化しない、3) 四面体 一次要素のみ実装されているため、上の定式化によりStreamline-upwind/Petrov-Galerkin (SUPG) 法 <sup>2)</sup>およびPressure stabilized/Petrov-Galerkin (PSPG) 法<sup>3)</sup>による定式化と同じ離散式が得られる.

- [1] T. J. R. Hughes et al.: Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 73, pp.173-189, 1989.
- [2] T. E. Tezduyar.: Advances in applied mechanics, Vol. 28, pp. 1–44, 1991.
- [3] T. E. Tezduyar et al.: Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 95, No. 2, pp. 221–242, 1992.

1.3 空間方向の離散化 e). 空間方向に離散化された方程式 ・ 空間方向に離散化された方程式は次のようになる.  $[M_{\rm V}] \{ {}^{t}\boldsymbol{a} \} + [C_{\rm V}] \{ {}^{t}\boldsymbol{v} \} + [P_{\rm V}] \{ {}^{t}p \} = \{ F_{\rm E} \} (15)$  $[M_{\rm P}] \{ {}^{t}\boldsymbol{a} \} + [C_{\rm P}] \{ {}^{t}\boldsymbol{v} \} + [P_{\rm P}] \{ {}^{t}p \} = \{0\}$ (16) $\left\{ {}^t oldsymbol{a} 
ight\}$ :節点加速度ベクトル  $\left\{ {}^t oldsymbol{v} 
ight\}$ :節点静水圧カベクトル  $\left\{ {}^t oldsymbol{p} 
ight\}$ :節点静水圧カベクトル  $[M_V]$ : Navier-Stokes方程式の加速度に関する係数行列  $[M_P]$ : 連続の式の加速度に関する係数行列 :連続の式の速度に関する係数行列  $|C_{\rm P}|$ : Navier-Stokes方程式の速度に関する係数行列  $|C_{\rm V}|$ :連続の式の圧力に関する係数行列  $[P_{\mathrm{P}}]$ : Navier-Stokes方程式の圧力に関する係数行列  $|P_{\rm V}|$ {F<sub>E</sub>}:節点外カベクトル

#### 1.4 時間方向の離散化

• 時刻 t における変数が既知として時刻 t' における変数をCrank-Nicolson法により次式で求める  $[K_{VV}] \left\{ {}^{t'}v \right\} + [K_{VP}] \left\{ {}^{t'}p \right\} = \{F_{E}\} + \left\{ {}^{t}F_{V} \right\} (17)$  $\Delta t : 時間増分$  $[K_{PV}] \left\{ {}^{t'}v \right\} + [K_{PP}] \left\{ {}^{t'}p \right\} = \left\{ {}^{t}F_{P} \right\}$ (18)

$$\begin{split} [K_{\rm VV}] &= \frac{1}{\Delta t} \left[ M_{\rm V} \right] + \frac{1}{2} \left[ C_{\rm V} \right] (19) \left[ K_{\rm VP} \right] = \left[ P_{\rm V} \right] (20) \left\{ {}^{t}F_{\rm V} \right\} = \left( \frac{1}{\Delta t} \left[ M_{\rm V} \right] - \frac{1}{2} \left[ C_{\rm V} \right] \right) \left\{ {}^{t}\boldsymbol{v} \right\} (21) \\ \\ \\ \tilde{\boldsymbol{x}}$$
速による流速への影響 圧力による流速への影響 
$$\begin{split} [K_{\rm PV}] &= \frac{1}{\Delta t} \left[ M_{\rm P} \right] + \frac{1}{2} \left[ C_{\rm P} \right] (22) \left[ K_{\rm PP} \right] = \left[ P_{\rm P} \right] (23) \left\{ {}^{t}F_{\rm P} \right\} = \left( \frac{1}{\Delta t} \left[ M_{\rm P} \right] - \frac{1}{2} \left[ C_{\rm P} \right] \right) \left\{ {}^{t}\boldsymbol{v} \right\} (24) \\ \\ \\ \\ \tilde{\boldsymbol{x}}$$
速による圧力への影響 圧力による圧力への影響 E力による圧力への影響 10



図1. 非線形動的陰解法ルーチンの流れ

#### 1.5 FrontISTRへの実装 b). 接線剛性マトリクス計算ルーチンの変更

・同様にして、外力・内力の計算ルーチンも更新する.



#### 1.5 FrontISTRへの実装 c). 変数の読み替え

- •構造に向けたコード内で下記のように変数を読み替える
  - ・構造解析における変位が流体解析における流速に対応している.
  - ・ 圧力は流速の第4自由度として定義されている.

#### 表1動的陰解法における各種変数の構造解析,流体解析間の対応表

	構造解析	流体解析
fstrSOLID%unode(:)	最新の変位(NR法反復で更新)	前の時間ステップでの速度
fstrSOLID%dunode(:)	変位増分	速度増分
fstrDYNAMIC%DISP(:,:)	前の時間ステップでの変位	前の時間ステップでの速度 (第4自由度が圧力に相当)
fstrDYNAMIC%VEL(:,:)	前の時間ステップでの速度	使用しない
fstrDYNAMIC%ACC(:,:)	前の時間ステップでの加速度	使用しない

#### 1.6 実行方法 a). メッシュファイルの記述

- ・要素は現時点で四面体一次P1P1要素のみ対応
   ・要素番号を3414と指定すること
- V5.0 α 以降で六面体一次要素なども導入予定

<pre>!ELEMENT, TYPE=3414, E</pre>	EGRP=ELEMENT_ALL
1, 2, 963, 32, 1	
2, 33, 963, 32, 2	
3, 962, 32, 993, 963	
4, 963, 32, 993, 994	
5, 994, 963, 32, 33	
6, 963, 32, 1, 962	
7, 3, 964, 33, 2	
8, 34, 964, 33, 3	
9, 963, 33, 994, 964	
10, 964, 33, 994, 995	

### 1.6 実行方法 b). 制御ファイルの記述(1)

- ・現時点で動的陰解法のみ対応
  - NONLINEARを指定しても挙動は変わらない(強制的に線形化される)
- !DYNAMICカードの記述方法は通常の動解析と同じ



### 1.6 実行方法 c). 制御ファイルの記述(2)

- ・現時点では節点への速度,圧力を与える基本境界条件のみ
   ・重力を与える境界条件を検証中
- 動解析において変位を与える!BOUNDARY
  - •フォーマットは通常の動解析と同様



この場合第2自由度から第3自由度まで値を指定(4で圧力が指定) 16



・要素番号3414とした要素に割り当てた材料(この例だとFLUID)に次のように材料物性値を与える.

メッシュファイルで

・メッシュファイルの材料物性値は使用しない



この場合第2自由度から第3自由度まで値を指定(4で圧力が指定) 17

### 1.6 実行方法 e). 制御ファイルの記述(4)

- 非対称行列に対応しているソルバのみ実行可能
  - ・MUMPSも使えるがコードを書き換える必要あり





- ・構造解析における変位を流速とみなしているため、可視化の際には「DISP」を指定する必要がある.
  - ・このように指定すると、「VELOCITY」と「PRESSURE」というデータが出力されるようになる.



#### 1.7 数値例題 a). 問題設定





Viscosity [Pa•s]	0.001
Density[kg/m <sup>3</sup> ]	1000.0
Reynolds number	1000



図 4. キャビティ内強制対流問題の解析メッシュ

表 3. キャビティ内強制対流問題の解析条件

time increment [s]	node	element	total step
10.0	29,791	162,000	10,000



図 5. 平面 y = 0 上での速度分布

[4] Ku, H. C. et al., J. Comput. Phys., Vol.70, pp.439-462, 1987.

21



・要素数を増やしてスピードアップの測定を行う.



表 4. より細かいメッシュを用いたキャビティ内強制対流問題の解析条件of the lid-drivencavity flow problem

time i	ncrement [s]	node	element	total step
	10.0	1,771,561	10,368,000	2,500

#### 表 5.計算に使った計算機の諸元

server	Fujitsu PRIMERGY RX350 S7
CPU	2x Intel Xeon E5-2670, (2.6 GHz, 8-core, 20 M L3-Cache)
memory	DDR3-1600 16x 8 GB
interconnect	InfiniBand 4x FDR, 56 Gbps
FLOPS	332.8 GFlops
memory bandwidth	102.4 GB/s

#### 1.7 数値例題 d). 計算結果要素数を増やした問題



- 逐次計算の場合, 1ステップの計算に22分 7秒かかる
- •このうち、線形ソルバの求解にかかる時間 は19.58秒、前処理には9.179秒かかる
- ・ 剛性マトリクスや右辺ベクトルを組み立て る時間が線形ソルバ求解の時間より長い
  - ・特に全体剛性マトリクスの構築が長い
  - ・線形ソルバの計算時間がただちに飽和するため,理想的なスピードアップが得られない.

コア数

図 8. キャビティ内強制対流問題のより細かい解析メッシュを使った性能向上率の測定

## 2. 流体構造連成解析

#### 2.1 概要

- ・流体と構造、伝熱と構造といった複数の場を組み合わせて解く連成 解析機能をFrontISTRに導入した事例について紹介します。
  - ・ 連成解析機能は Ver 5.0α 以降に導入される予定です.
- 本発表では、ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 法<sup>5)</sup> に基づく流体構造連成解析をターゲットとして、FrontISTR上に連成解析を実現するために必要なコード変更について説明します。
- 構造の大変形を伴う場合でも解析メッシュが破綻することなく計算を 続行できることを検証問題を通じて確認します。

#### 2.2 ALE法の概要

- ・構造メッシュは節点変位に合わせてそのまま変形させる
- 流体領域のメッシュは構造メッシュの変形に追従し、メッシュが破綻しない程度に変形させるただし、流路の形が変わらないように、流体領域の表面はメッシュを変形させない。



図9. ALE法による流体メッシュの変形

$$= \begin{cases} {}^{t}\boldsymbol{u} & \text{on } {}^{t}\Gamma_{\mathrm{I}} \\ \boldsymbol{0} & \text{on } {}^{t}\Gamma_{\mathrm{F}}/{}^{t}\Gamma_{\mathrm{I}} \end{cases}$$
(25)

 ${}^{t} oldsymbol{y}$ :メッシュの初期配置からの変位

 ${}^t \boldsymbol{u}$ :(物理的な)変位

新たに節点のメッシュ変位を 未知変数として求める必要がある

### 2.3 支配方程式・離散化 a). Navier-Stokes方程式への変更

 ALE法を導入することにより、Navier-Stokes方程式が次式のように 変更される。

$${}^{t}\rho\frac{\partial^{t}\boldsymbol{v}}{\partial t} + {}^{t}\rho((\boldsymbol{\overline{v}} - \boldsymbol{\overline{v}})) \cdot {}^{t}\nabla) {}^{t}\boldsymbol{v} = {}^{t}\rho {}^{t}\boldsymbol{b} - {}^{t}\nabla {}^{t}\boldsymbol{p} + {}^{t}\nabla \cdot {}^{t}\boldsymbol{T}' \quad (26)$$

前の時刻の値を用いるのであれば、移流速度を変更するだけで実装できる

 ${}^t \dot{m{y}}$ :メッシュ速度ベクトル

### 2.4 支配方程式・離散化 b). 流体構造連成固有の境界条件

・流体-構造界面で次の2式が満足される必要がある.

運動学的条件

- ${}^{t}\boldsymbol{v}_{\mathrm{S}} = {}^{t}\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}$  on  ${}^{t}\Gamma_{\mathrm{I}}$  (27) 力学的条件  ${}^{t}\boldsymbol{t}_{\mathrm{S}} = -{}^{t}\boldsymbol{t}_{\mathrm{F}}$  on  ${}^{t}\Gamma_{\mathrm{I}}$  (28)  ${}^{t}\boldsymbol{v}_{\mathrm{S}} : 構造の速度ベクトル$   ${}^{t}\boldsymbol{v}_{\mathrm{S}} : 構造の応力ベクトル$   ${}^{t}\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}} : 流体の速度ベクトル$  ${}^{t}\boldsymbol{t}_{\mathrm{F}} : 流体の応力ベクトル$
- この条件は、流体-構造界面で流体メッシュと構造メッシュが節点を 共有しており、なおかつ補間関数が等しければ必ず満足される.

# 2.4 支配方程式・離散化c). 流体メッシュの制御式

・流体領域でのメッシュ変位は次式を用いて解く(ヤコビアン硬化法<sup>6</sup>).

$$\left( \int_{\tilde{\Omega}_e} [B_e]^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \tilde{D}_e \end{bmatrix} [B_e] \, dV \right) \left\{ {}^t \boldsymbol{y}_e \right\} = \{ 0 \} (29) \quad \tilde{\Omega}_e : \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol$$

・弾性マトリクスについては、Poisson比は0.3とし、Young率 E は次式 で与える.  $E = \frac{1}{J} (30)$  J : yyyzz 変形を考慮せずに求めた要素elこおける愛想パラメトリック写像の行列式

[6] A. A. Johnson et al.: *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 119, pp. 73-94, 1994.

### 2.5 FrontISTRでの分離型連成解析 a). 背景

- 今回発表したALE法では、メッシュ変位(3自由度)を線形ソルバにより求める必要がある
- 複数の場を同時に解く一体型連成を採用する場合,流体領域上では速度(3自由度),圧力,メッシュ変位が必要になり,節点あたりの自由度数は合計で7自由度となる
  - 接線剛性マトリクスを作る際にメモリの消費量が著しく増加する
- FrontISTRに分離型連成ソルバを導入し、メッシュ変位場は速度、圧 力場と分離して解くことを考える

#### 2.5 FrontISTRでの分離型連成解析 b). 物理場ループの導入



- ・時間ステップループとNR法反復ループの間に物 理場ループを導入する
- ・物理場に識別番号を振っておく、例えば、
  - ・1. 流体と構造
  - •2.メッシュ変位
  - ・3.レベルセット
  - 0. 物理場ループ終了, 最初に戻る
- ・物理場を解く順番に並べた配列を準備する.
  - 例えば、1,2,0としておけば、流体と構造を解いたの ち、次の時間ステップに遷移する.

本発表では、1,2,0とすることで流体構造連成を実現します.

図10. FrontISTRにおける分離型連成ソルバの流れ

#### 2.5 FrontISTRでの分離型連成解析 c). 接線剛性マトリクス計算ルーチンの変更





図11. 接線剛性マトリクス計算ルーチンへの変更

表6. 分離型連成ソルバのための主要な変数の意味づけ

	現時点での実装	変更後
fstrSOLID%unode(:)	現時刻での暫定的な{変位,速度}	使用しない
fstrSOLID%dunode(:)	{変位,速度}増分	変位増分
fstrDYNAMIC%DISP(:,2)	前の時間ステップでの{変位,速度}	現時刻での暫定的な変位
fstrDYNAMIC%DISP(:,1)	前の時間ステップでの{変位,速度}	前の時間ステップでの変位
fstrDYNAMIC%VEL(:,2)	前の時間ステップでの速度 流体の場合意味なし	現時刻での暫定的な速度
fstrDYNAMIC%VEL(:,1)	前の時間ステップでの速度 流体の場合意味なし	前の時間ステップでの速度
fstrDYNAMIC%ACC(:,2)	前の時間ステップでの加z速度 流体の場合意味なし	現時刻での暫定的な加速度
fstrDYNAMIC%ACC(:,1)	前の時間ステップでの加速度 流体の場合意味なし	前の時間ステップでの加速度
fstrDYNAMIC%PRES(:, 2)	存在しない	現時刻での暫定的な圧力
fstrDYNAMIC%PRES(:, 1)	存在しない	前の時間ステップでの圧力

#### 2.5 FrontISTRでの分離型連成解析 d). 物理場ループの導入

- 物理場によっては、他の物理場の現時点での暫定解、あるいは前の時刻における値を参照したいことがある。
- 現在変数の読み替えで対応している部分を全て構造側に合わせ、
   名前と物理的意味を一致させる。
  - ・時間方向の離散化を差分法から時間積分法(Newmark-β法)に切り替える.
  - これに伴い、非圧縮性流れ解析の未知変数は「流速増分」ではなく「変位増分」となる
- fstrSOLID%unodeは廃止, fstrSOLID%dunodeは改名する.
  - ・変位はfstrDYNAMIC%DISPがあるため、fstrSOLID%unodeは重複する
  - fstrSOLID%dunodeは現時刻での未知変数増分の暫定解であることがわかりやすくなるように

<ul> <li>2.6 数値例題</li> <li>·空気中で流れ場により振動する弾性梁<sup>®</sup>の流れ 問題をFrontISTRで解く。</li> <li>a). 問題設定</li> <li>·流体・構造変位場→メッシュ変位の順に解く。</li> </ul>						
活向きに 0.513m/s 滑り無し境界条件	J境界条件 フリートラクション 構造 株					
図 12.弾性梁周りの流れ問題 表 7.弾性梁周りの流れ問題における材料物性値						
viscosity [Pa•s]	1.82	図 13.弾性梁周りの流れ問題				
fluid density[kg/m <sup>3</sup> ]	1.18×10 <sup>-5</sup>	表 8. 弾性梁	周りの流れ	問題におけ	る解析条件	
Reynolds number	100	time increment[s]	node	element	total step	
Young coefficient [Pa]	$2.5 \times 10^{5}$	0 0005	13 292	1 <sup>st</sup> hexa	10 000	
Poisson ratios	0.35	0.0005	15,272	6,484	10,000	

[8] W. Wall, Ph. D. Thesis, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1999.

## 2.6 数値例題 b). 動画

・総計算時間:32並列で10632.78 [s]

#### 3. まとめ

- 本発表では、V4.6に実装されている流体解析機能について、実装の 仕組みと利用方法について解説しました。
- ・また、V5.0α以降にて導入が検討されている連成解析機能について、
   流体構造連成を対象とした実装事例について述べました.
- なお、今回は割愛しましたが、以下の内容についても今後事例として報告させていただければと存じます。
  - ・連成解析機能を用いたレベルセット法に基づく気液二相流解析
  - ・ 連成解析機能を拡張した iterative staggered schemeの実現